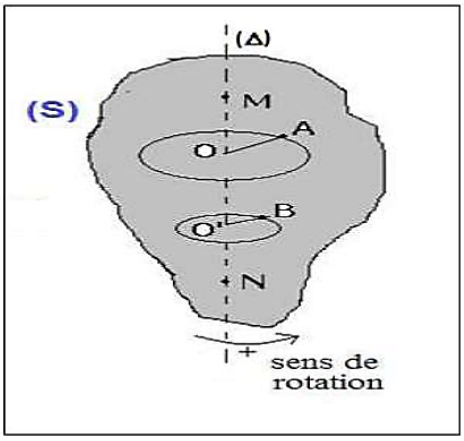
Mouvement de rotation d'un corps solide indéformable autour d'un axe fixe

I. Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

1. Exemple :



On considère un solide (S) en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ).

- Les deux points A et B décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe (Δ).
- Les deux point M et N situés sur l'axe (Δ) sont immobiles.

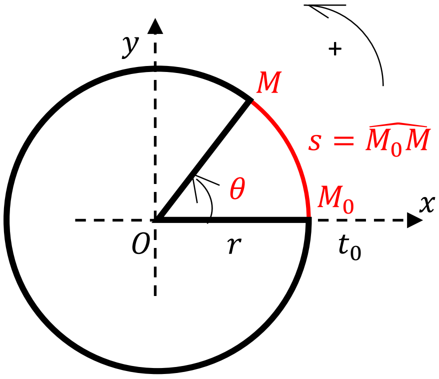
2. Définition :

Un solide est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) si : Tous les points du solide décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe de rotation, sauf les points qui appartiennent à cet axe.

II. Repérage d'un point d'un solide en mouvement de rotation :

Soit M un point quelconque d'un corps solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ). On oriente la trajectoire dans un sens arbitraire. La position du point M est repérée par :

1. Abscisse angulaire :



On appelle l'abscisse angulaire du point M à un instant t la valeur algébrique de l'angle : $\boldsymbol{\theta = (\widehat{\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM}})}$

L'unité de mesure de l'abscisse angulaire est le radian (rad).

L'abscisse angulaire en (rad) ⟶ $\boxed{\theta = 2\pi . n}$ ⟵ Nombre de tours

2. Abscisse curviligne :

On appelle l'abscisse curviligne du point mobile M à un instant t la valeur algébrique de l'arc :

$$s = \widehat{M_0M}$$

L'unité de mesure de l'abscisse curviligne est le mètre (m).

$\boldsymbol{s}$ **:** est une grandeur algébrique son signe dépend de l'orientation de la trajectoire.

3. La relation entre l'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire :

L'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire sont proportionnelles :

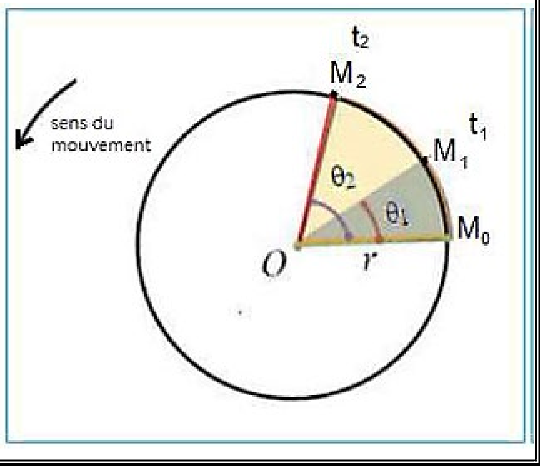
Abscisse curviligne en (m) ⟶ $s(t) = r . \theta(t)$ ⟵ Abscisse angulaire en (rad)

Le rayon de la trajectoire en (m)

III. Vitesse d'un solide en rotation :

1. Vitesse angulaire

a) Vitesse angulaire moyenne



Lorsqu'un solide est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ). Le point M occupe la position M_1 à l'instant t_1 et la position M_2 à l'instant t_2, les deux positions étant repérées par des abscisses angulaires θ_1 et θ_2.

La vitesse angulaire moyenne $\boldsymbol{\omega_m}$ du point M entre t_1 et t_2 est donnée par la relation suivante :

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

$\Delta\theta$: est l'angle de rotation du solide pendant la durée Δt.
L'unité de la vitesse angulaire dans (S.I) est le radian par seconde, noté $\boldsymbol{rad.s^{-1}}$.

b) La vitesse angulaire instantanée :

En considérant t_{i-1} et t_{i+1} deux instants très proches et qui encadrent l'instant t_i.
La vitesse angulaire instantanée ω_i à l'instant t_i est la vitesse angulaire moyenne entre les instants t_{i-1} et t_{i+1} :

$$\boldsymbol{\omega_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}}$$

2. Relation entre vitesse linéaire et vitesse angulaire :

Vitesse linéaire d'un point du solide :

Pendant la durée $\Delta t = t_2 - t_1$; le point M parcourt la distance $\widehat{M_1M_2}$, la vitesse linéaire moyenne V_m s'écrit :

$$\boldsymbol{V_m = \frac{\widehat{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

On sait que : $\boldsymbol{\Delta s = r.\Delta\theta}$

Donc : $\boldsymbol{V_m = r.\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r.\omega_m}$

Remarque :

Tous les points du solide ont, à chaque instant, la même vitesse angulaire de rotation, mais ils n'ont pas généralement la même vitesse linéaire.

Mouvement de rotation uniforme

1. Définition

Le mouvement de rotation d'un solide est dit uniforme si sa vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ reste constante au cours du temps ($\boldsymbol{\omega = cte}$).

2. Les propriétés de la rotation uniforme

a) La période :

La période T d'un mouvement de rotation uniforme est la durée d'une toure complète.

On sait que : $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, pour une toure $\Delta\theta = 2\pi$ et $\Delta t = T$

Alors : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ Donc : $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ avec T la période en (s) et ω la vitesse angulaire en ($rad.s^{-1}$).

b) La fréquence :

La fréquence f d'un mouvement de rotation uniforme est le nombre de tours par seconde.

$\boldsymbol{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$ **;** avec $\boldsymbol{f}$ la fréquence en hertz $(\boldsymbol{Hz})$.

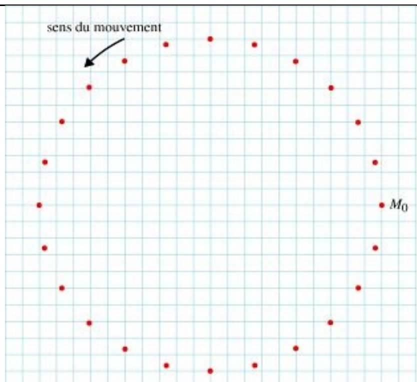
3. Equation horaire d'un mouvement de rotation uniforme :

a) Activité :

La figure ci-dessous représente l'enregistrement du mouvement d'un point M d'un autoporteur en rotation autour d'un axe fixe sur une table horizontale à coussin d'air, pendant des durées successives et égales $\tau = 40ms$.

Mouvement de rotation uniforme.

1. Quelle est la nature du mouvement du point M ? justifier.
2. Calculer la valeur de vitesse angulaire instantanée aux positions M_4 et M_7.
3. Calculer la valeur de vitesse angulaire moyenne entre les positions M_1 et M_5.
4. Quelle remarque peut-on faire concernant la valeur de vitesse angulaire.



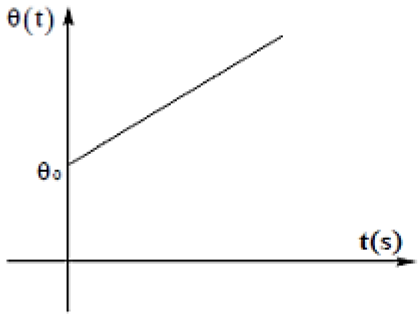
L'équation horaire du mouvement de rotation uniforme.

1. Compléter le tableau suivant tel que :
   - M_0 Origine des abscisses angulaires $\theta = 0$.
   - M_2 Origine de temps $t = 0$.
2. Sur un papier millimétrique et en choisissant une échelle convenable tracer la fonction $\theta_i = f(t)$.
3. En déduire l'équation mathématique de cette fonction et donner la signification physique de son coefficient directeur.

Position de M	t_i en (s)	θ_i en (rad)
M_2		
M_3		
M_4		
M_5		
M_6		
M_7		

b) Généralisation

Soit θ et θ_0 sont des abscisses angulaires, d'un point M d'un solide en rotation uniforme, successivement aux instants t et t_0 :



On écrit : $\boldsymbol{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta-\theta_0}{t-t_0}$

Alors : $\boldsymbol{\theta = \omega.(t - t_0) + \theta_0}$

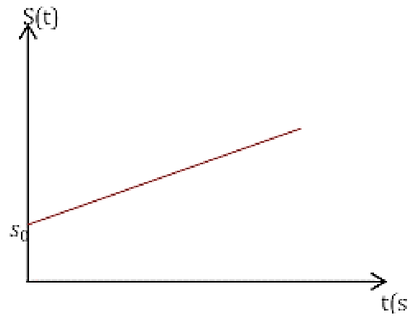
Pour $\boldsymbol{t_0 = 0}$ on a : $\boldsymbol{\theta = \omega.t + \theta_0}$

Donc l'équation horaire d'un mouvement de rotation uniforme en abscisse angulaire s'écrit : $\boldsymbol{\theta(t) = \omega.t + \theta_0}$

$\boldsymbol{\theta(t)}$ **:** l'abscisse angulaire à l'instant t en (rad) ;

$\boldsymbol{\theta_0}$ **:** l'abscisse angulaire à l'instant $t = 0$ en (rad) ;

$\boldsymbol{\omega}$ **:** la vitesse angulaire en $(rad.s^{-1})$.



L'équation horaire d'un point d'un solide en mouvement de rotation uniforme en abscisse curviligne s'écrit : $\boldsymbol{s(t) = V.t + s_0}$

$\boldsymbol{s(t)}$ **:** l'abscisse curviligne à l'instant t en (m) ;

$\boldsymbol{s_0}$ **:** l'abscisse curviligne à l'instant $t = 0$ en (m) ;

$\boldsymbol{V}$ **:** la vitesse linéaire en $(m.s^{-1})$.

Exercice d'application 1 :

L'équation horaire du mouvement d'un point M d'un corps solide en rotation autour d'un axe fixe est :

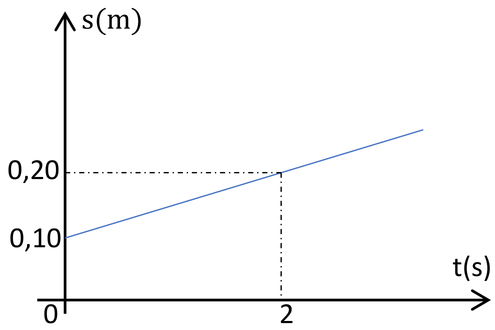
$$s(t) = 0{,}60t + 0{,}04 \quad ; \quad s\ en\ (m)\ \ et\ \ t\ en\ (s)$$

1. Quelle est la nature du mouvement du point M ?
2. Déterminer les valeurs de l'abscisse curviligne du point M à l'instant t = 0 et sa vitesse linéaire.
3. Sachant que le diamètre de la trajectoire circulaire est $d = 20cm$, déterminer l'expression de l'abscisse angulaire en fonction du temps $\theta(t)$.

Exercice d'application 2 :

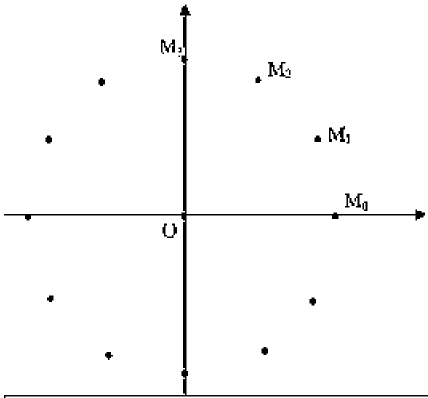
Le document ci-contre donne les variations de l'abscisse curviligne d'un point M d'un corps solide en rotation autour d'un axe fixe en fonction du temps.

1. Quelle est la nature du mouvement du point M ?
2. Déterminer l'équation horaire $s(t)$du mouvement.
3. Déduire l'équation horaire $\theta(t)$du mouvement, sachant que le rayon de la trajectoire est $r = 10cm$.
4. Calculer la vitesse linéaire d'un point N distant de $25cm$ de l'axe de rotation.



Exercice d'application 3 :

La figure suivante représente l'enregistrement de mouvement d'un point M située au centre d'un autoporteur en rotation autour d'un axe fixe. (L'autoporteur est lié par un fil, de longueur, à un axe métallique fixé sur une table horizontale). L'intervalle de temps entre deux enregistrements consécutifs est égal à $40ms$.



L'échelle de l'enregistrement est $^1/_4$

On considère l'axe (Ox) passant par M_0 comme direction référentielle. Les positions du point M sont déterminées par l'abscisse angulaire $\theta_i = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_i})$ ou bien par l'abscisse curviligne $s_i = \widehat{M_0M_i}$. Le moment d'enregistrement de la position M_2 correspond à l'origine des temps $t = 0$.

1. Montrer que le mouvement de M est circulaire uniforme.
2. Compléter le tableau suivant :

Position M_i	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
θ_i									
s_i									
t_i									

3. En utilisant une échelle convenable, tracer les deux courbes $\theta = f(t)$ et $s = f(t)$.
4. En déduire les équations horaires du mouvement de point M.
5. Déterminer la vitesse angulaire de rotation de l'autoporteur et la vitesse linéaire du point M graphiquement et par le calcul.
6. Vérifier la relation $V = r.\omega$, tel que v est la vitesse linéaire, ω la vitesse angulaire et r le rayon de la trajectoire.