Exercice n°3 :(11.5pts)

Partie I

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{x} + \ln x$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1	**1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.**
0.5	**2.a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**
0.75	**2.b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$**
1	**2.c. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-x\right)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.**
0.75	**3.a. Montrer que : $\forall x>0$, $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$**
0.75	**3.b. Calculer $f(1)$ puis dresser le tableau de variations de f**
0.5	**3.c. En déduire le signe de f sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$**
0.75	**3.d. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1**
	4. Dans la figure ci-dessous (C) est la courbe représentative de f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
1	**4.a. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_1^e \ln(x)\,dx=1$**
1	**4.b. Montrer que l'aire de la partie hachurée est égale à $\dfrac{1}{2}(e^2-1)\,u.a$ (u.a signifie unité d'air)**

Partie II

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

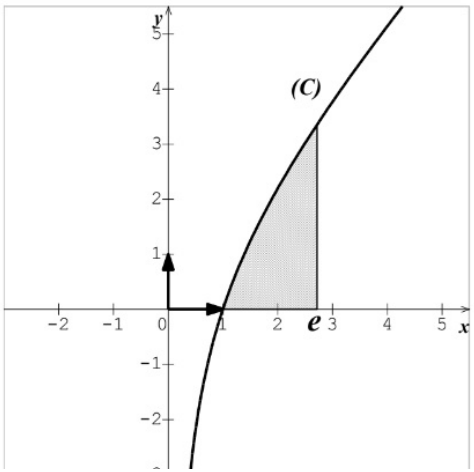
$$g(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-1+2\ln x)$$

1 **1. Montrer que :** $\forall x>0$, $g'(x)=f(x)$

1 **2. En utilisant 3.c. de la partie I, montrer que** g **est décroissante sur** $]0;1]$ **et croissante sur** $[1;+\infty[$

0.5 **3.a. Que représente la fonction** g **pour la fonction** f **? (Justifier la réponse).**

1 **3.b. En déduire ,sans calcul, la valeur de** $g(e)-g(1)$ **(Justifier la réponse).**



Exercice n°3 :(1.5pts)

Calculer les intégrales suivantes :

0.5 1. $I=\int_0^1 \left(x^2+2x\right)dx$

1 2. $J=\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties)

Exercice n°4 :(10pts)

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^x-x$

0.5 1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

1.25 2. Montrer que $g'(x)\leq 0$ sur $]-\infty;0]$ et $g'(x)\geq 0$ sur $[0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de g (Le calcul des limites en $+\infty$ et en $-\infty$ n'est pas demandé)

0.5 3. En déduire que $e^x-x>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{x}-x}$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

0.5	1. Montrer que l'ensemble de définition de f est : $D_f=\mathbb{R}$
1	2.a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.
1.5	2.b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.
1	3.a. Montrer que $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^{x}}{(e^{x}-x)^{2}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$
1.5	3.b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f
0.5	3.c. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0=0$
1.75	4. Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la tangente (T), la droite d'équation $y=1$ puis la courbe (C_f) (On prendra $\dfrac{e}{e-1}\simeq 1,6$ et $\lVert\vec{i}\rVert=\lVert\vec{j}\rVert=2cm$). On admettra que (C_f) a deux points d'inflexions : $J(0;1)$ et K d'abscisse a tel que $1,5< a <2$