## Exercice 1 : (10 points)

**Partie A :**

**1 -** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, 1+x \leq e^x$

**2 - a)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\, 0 \leq 1-e^{-x} \leq x$

**b)** En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\, 0 \leq 1-x+\dfrac{x^2}{2}-e^{-x} \leq \dfrac{x^3}{6}$

**c)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-x-e^{-x}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

**Partie B :**

On considère la fonction $f$ définie sur $I=[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=1 \text{ et } \forall x \in ]0,+\infty[\;;\; f(x)=\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}.$$

Et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

**1 - a)** Montrer que $f$ est continue à droite en 0

**b)** Vérifier que : $(\forall x>0)\,;\, \dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1-2x-e^{-2x}}{x^2}-\dfrac{1-x-e^{-x}}{x^2}$

**c)** En déduire que $f$ est dérivable à droite en 0 et que la nombre dérivé à droite en 0 est $-\dfrac{3}{2}$

**2 - a)** Montrer que : $(\forall x>0)\,;\, f'(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x^2}\left(2x+1-e^x(1+x)\right)$

**b)** Montrer que : $(\forall x>0)\,;\, f'(x) \leq -e^{-2x}$ (On pourra utiliser : $1+x \leq e^x$)

**c)** En déduire le sens de variations de $f$ sur $I$

**3 -** On admet que : $(\forall x>0)\,;\, f''(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x^3}\left(-4x^2-4x-2+e^x(2+2x+x^2)\right)$

**a)** Montrer que : $(\forall x \geq 0)\,;\, 1+x+\dfrac{x^2}{2} \leq e^x$

**b)** En déduire que : $(\forall x>0)\,;\, f''(x)>0$

**4 -** On admet que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=-\dfrac{3}{2}$

**a)** Montrer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

**b)** En déduire que : $(\forall x \in I)\,;\, |f'(x)| \leq \dfrac{3}{2}$

**5 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

**b)** Dresser le tableau de variations de $f$

**c)** Déterminer la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à sa demi-tangente au point $T(0,1)$

**d)** Représenter graphiquement la courbe $(\mathscr{C})$ dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

**Partie C :**

**1 -** Pour tout $x$ de $[0,1]$, on pose , $g(x)=f(x)-x$

**a)** Montrer que $g$ est une bijection de $[0,1]$ vers un intervalle $J$ que l'on déterminera.

**b)** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in ]0,1[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$





**2 -** Pour tout entier naturel non nul $n$ et pour tout entier $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, on considère les nombres réels $x_k=\dfrac{k\alpha}{n}$ et on pose , $I_k=\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt$ et $J_k=\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt$

**a)** Montrer que : $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}\,;\, |J_k-I_k| \leq \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t-x_k)dt$

**b)** En déduire que : $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}\,;\, |J_k-I_k| \leq \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^2$

**3 -** On pose : $L=\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)dt$

**a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\left|\dfrac{\alpha}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right)-L\right| \leq \dfrac{3}{4}\dfrac{\alpha^2}{n}$

**b)** En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right)=\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)dt$

## Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit $m \in \mathbb{C}\backslash\{-1,0,1\}$