ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économique

Session : Rattrapage juin 2020

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Sciences Économique**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

Instructions au candidat(e)

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Suites numériques** .... **6 points**
- Exercice 2 : **Étude d'une fonction numérique complexes** .... **10 points**
- Exercice 3 : **Étude d'une fonction** .... **4 points**
- Exercice 4 : **Calcul des primitives** .... **4 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

1 PARTIE I OBLIGATOIRE : Exercice 1 et Exercice 2

Exercice 1 : (6 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2.

1 pt **2 -** **a)** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 3$.

0,5 pt **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n - 3)^2}{u_n - 2}$.

0,25 pt **c)** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

0,5 pt **3 -** Montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

0,25 pt **a)** Calculer v_0.

1 pt **b)** Calculer $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1.

0,5 pt **c)** Montre que $v_n = \dfrac{1}{2} + n$; pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **5 -** **a)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{3v_n + 1}{v_n}$.

0,5 pt **b)** En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{6n + 5}{2n + 1}$.

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 : (10 pts)

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$. par : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

0,5 pt **1 -** Montrer que $g'(x) = 2\left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

0,75 pt **2 -** Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

3 - Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variations de g (Le calcul des limites n'est pas demandé).

0,75 pt

0,5 pt **4 -** Déduire du tableau de variations que $g(x) > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$. par : $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0,75 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

0,5 pt **2 -** **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \left(\dfrac{x}{2} + 1\right)\right)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

1 pt

0,75 pt **3 -** **a)** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

0,5 pt **b)** Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

0,5 pt **c)** En déduire que f est croissante sur $]0;+\infty[$.

4 - Soit (D) la droite d'équation $y=\dfrac{x}{2}+1$.

0,5 pt **a)** Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (D) et de la courbe (C).

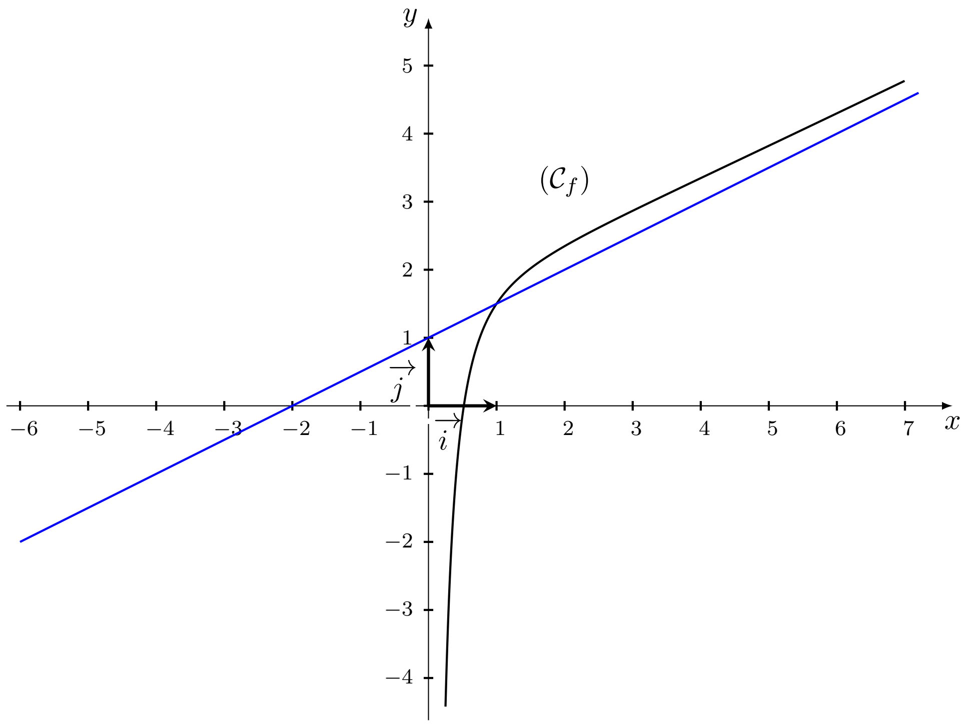
1 pt **b)** Étudier le signe de $\left(f(x)-\left(\dfrac{x}{2}+1\right)\right)$ sur $]0;+\infty[$ et en déduire la position relative de (C) par rapport à (D).

1 pt **5 -** Calculer $f(1)$ et $f'(1)$ et donner l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0=1$.

6 - Dans la figure ci-dessous (C) est la courbe représentative de f et (D) la droite d'équation $y=\dfrac{x}{2}+1$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soit a l'abscisse du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses $(O;\vec{i})$.

1pt Donner à partir de la courbe (C) le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.



2 PARTIE II : Le candidat a exclusivement le choix de répondre : soit à l'exercice 3 soit à l'exercice 4

Exercice 3 : (4 pts)

On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=\left(x^2+1\right)e^x-1$

1pt **1 -** Montrer que $h'(x)=(x+1)^2e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 pt **2 -** Donner le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$

1,5 pt **3 -** Calculer $h(0)$ puis dresser le tableau de variations de h (Le calcul des limites n 'est pas demandé)

1 pt **4 -** Etudier à partir du tableau de variations le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : (4 pts)

Déterminer une primitive de chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 telles que :

1 pt **1 -** $f_1(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1 pt **2 -** $f_2(x) = 3x^2\left(x^3+1\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1 pt **3 -** $f_3(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3}$ définie sur $]0;+\infty[$.

1 pt **4 -** $f_4(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$

$\boxed{\text{FIN}}$