a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2e^{\frac{1}{x}} - 1 \leq 0$. **(0,5)**

b. En déduire que (C), la courbe de la fonction f, admet un point d'inflexion à déterminer. **(0,5)**

9.

La courbe **ci-contre** est la courbe représentative de la fonction h définie par :

$$h(x) = x\left(2 - e^{\frac{1}{x}}\right)$$

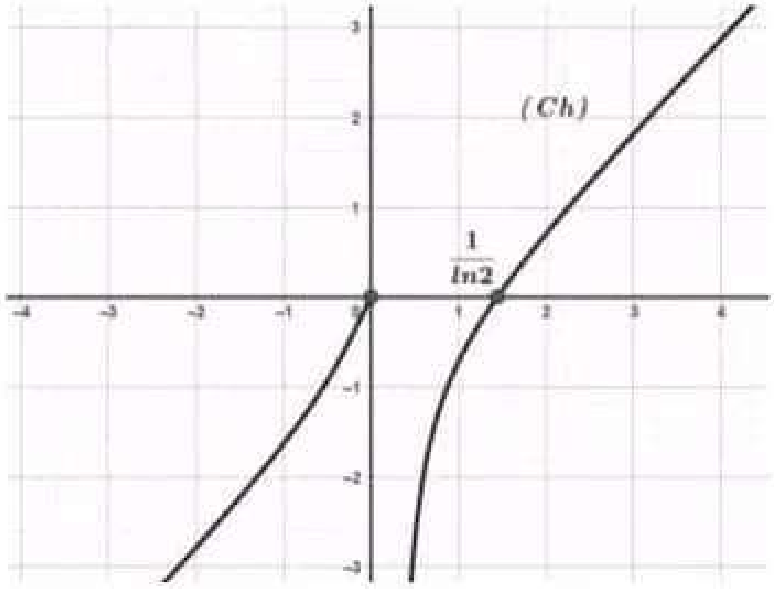
a. Montrer que :

$(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $x - f(x) = h(x)\, e^{\frac{1}{x}}$. **(0,5)**

b. En déduire **la position relative** de (C)

et la droite (T) d'équation $y = x$ sur $\mathbb{R}$,

puis déduire que $f(\alpha) > \alpha$. **(0,75)**



10. Construire dans le meme repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) et la droite (T). **(1)**

(On prend $\ln 2 \approx 1,1$; $\alpha \approx -0,8$; $f\left(-\frac{1}{ln2}\right) = -\frac{1}{4ln2}$ et $f(\alpha) \approx -0,41$)

Exercice .... Les nombres complexes ....(9pts)

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$ **(1)**

b. Ecrire les solutions z_1 *et* z_2 de cet équation sous la fomre trigonométrique. **(1)**

c. Montrer que ${z_1}^{2024} + {z_2}^{2024} = 2^{1013}$. **(0,75)**

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé **direct** $(O, \vec{u}, \vec{v})$. *On* considère les points A, B, C, et D d'affixes **respictives** : $a = -\sqrt{2}$, $b = 1 + i$, $c = \overline{b}$, et $d = 2 + \sqrt{2}$

a. Montrer que $\frac{b-a}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{4}}$. **(1)**

b. En déduire que **B** est l'image de **C** par la rotation **R** de centre **A** et d'angle $\frac{\pi}{4}$. **(0,5)**

c. Montrer que $\overline{(\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AB})} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et calculer $\frac{AB}{AC}$. **(1)**

d. Montrer que le quadrilatère **ACDB** est un **losange** . **(1)**

3. Soit P le point du plan complexe d'affixe $p = 1 + \sqrt{2} + i$.

a. Vérifier que : $|p| = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ et $\overline{(\overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AB})} \equiv arg(p)\ [2\pi]$. **(1)**

b. En utilisant la question **(2.d)**, déduire que $arg(p) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$. **(0,5)**

c. Déduire p sous la forme trigonométrique. **(0,5)**

d. Montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$. **(0,75)**

Bonus

4. Soit (Δ) l'ensemble des points **M(z)** tel que $|z - b| = |z - c|$.

a. Déterminer l'ensemble (Δ), puis vérifier que l'ensemble (Δ) est **l'axe imaginaire**

b. Soit **M(z)** un point du plan tel que $M \in (AC)$.

Prouver que : $\overline{p}\,.\,\overline{z} - p\,.\,z = \sqrt{2}\,.(p - \overline{p})$ (remarquer que les points M , A et C sont alignés)

c. Montrer que **l'unique** point **d'intersection** des deux droits (Δ) et (AC) est le point d'affixe $i(2 - \sqrt{2})$.

''BON COURAGE ''

Année scolaire : 2023 – 2024. **Lycée: CHIKH MOHAMED LAGHDAF.**	**Devoir Surveillé :1** **Semestre : 2**	***Niveau : 2.BAC.PC.1 et 2.*** **Professeur : SAID HAMMOUCH**

Noter bien : Les réponses non justifiées ne seront pas prise en compte

Problème ....(11pts)

Partie I : Soient g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = 1 + e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2}{x} - 1\right)$

Et le tableau de variations de la fonction g ci-contre

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$1 \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	0

1.

a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α tel que : $-2 < \alpha < 0$. **(0,5)**

b. Vérifier que : $e^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha - 2}$. **(0,25)**

2. En déduire que : $(\forall x \in]-\infty; \alpha])$, $g(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [\alpha; 0[\cup]0; +\infty[)$, $g(x) \geq 0$. **(0,5)**

Partie II: On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)^2 & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Vérifier que $D_f = \mathbb{R}$. **(0,5)**

2. Montrer que la fonction f est continue à gauche en 0. **(0,5)**

3. a. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $f(x) = x + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}.\left(e^{\frac{1}{x}} - 2\right)$. **(0,5)**

b. Déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, puis interpréter le résultat géométriquement. **(0,5)**

4. a. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $f(x) = \frac{1}{x}.\left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}\right)^2$. **(0,5)**

b. Déduire que (C) admet une asymptote **horizantale** à déterminer, au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. **(0,5)**

5. a. Montrer que f est dérivable à gauche en $\mathbf{0}$ et $f'_g(0) = 1$. **(0,5)**

b. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) à gauche au point d'abscisse $\mathbf{0}$. **(0,5)**

6. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $f'(x) = \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right) g(x)$. **(0,75)**

b. Vérifier que $f'(\alpha) = 0$, puis interpréter le résultat géométriquement. **(0,5)**

7. a. Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[)$, $1 - e^{\frac{1}{x}} < 0$. **(0,5)**

b. Vérifier que $f(\alpha) = \frac{4\alpha}{(\alpha - 2)^2}$. **(0,25)**

c. Dresser le tableau de variations de f. **(0,5)**

8. On admet que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}\left(2e^{\frac{1}{x}} - 1\right)e^{\frac{1}{x}}$