Barème	**Exercice : 2(8 points)**
	I On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)\ :\ 27x - 13y = 1$
0.5	1 Montrer que l'équation (E) admet des solutions
1	2 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)\ :\ 27x - 13y = 1$, en précisant les différentes étapes
0.5	3 Montrer que pour tout entier naturel n , le nombre 2024 divise le nombre $(2025)^n - 1$
	4 Soit $(x; y)$ une solution de l'équation (E) dans $\mathbb{N}^2$
0.5	montrer que $\left((2025)^{27x} - 1\right) - 2025\left((2025)^{13y} - 1\right) = 2024$
0.5	5 Montrer que $(\exists(u; v) \in \mathbb{N}^2\ :\ u\left((2025)^{27} - 1\right) - v\left((2025)^{13} - 1\right) = 2024$
1	6 En déduire $pgcd\left((2025)^{13} - 1; (2025)^{27} - 1\right)$
	II Soit p un entier premier tel que $p > 2$, on suppose que $(\exists x \in \mathbb{N})\ :\ x^8 + 1 \equiv 0\ [p]$
0.5	1 Vérifier que $x^{16} \equiv 1\ [p]$
0.5	2 Montrer que $x \wedge p = 1$, en déduire que $x^{p-1} \equiv 1\ [p]$
	3 On pose $d = 16 \wedge (p - 1)$
0.5	a Montrer qu'il existe un couple $(u; v) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(p-1)u = d + 16v$
0.5	b En déduire que $x^d \equiv 1\ [p]$
1	c Montrer que $d = 16$ et que $p \equiv 1\ [16]$
0.5	4 Sachant que $2^{24} \equiv -1\ [97]$, montrer que $89^{40} \equiv -1\ [97]$
0.5	5 Déterminer le plus petit diviseur premier impair de l'entier naturel $N = 89^{40} + 1$
	Exercice : 3 (deux points
	On considère deux urne U_1 et U_2, l'urne U_1 contient n boules blanche et trois boules noires $(n \geq 1)$
	L'urne U_2 contient deux boules blanche et une boule noire
	Toutes les boules sont indiscernables au toucher
	Une épreuve consiste à tirer une boule de l'urne U_1 que l'on met dans l'urne U_2 puis on tire une boule de l'urne U_2 que l'on la met dans l'urne U_1
	1 Soit l'événement A : à l'issue de l'épreuve les deux urnes se retrouvent chacune avec
1	la configuration de départ , Montrer que $p(A) = \dfrac{3(n+2)}{4(n+3)}$
	2 On considère l'événement B : après la fin de tirage l'urne U_2 contient une seule boule blanche
1	Montrer que $p(B) = \dfrac{6}{4(n+3)}$

Lycée :RIAD EZZAHIA	**DEVOIR N° 02**	Classe :2$BACSMF$
Année scolaire : 2023/2024	**Semestre 02**	Durée : 2h

Exercice : 1 (10 points

I On considère l'ensemble $G = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 - 2y^2 = 1\right\}$, on définit sur l'ensemble G l'opération $*$ par $(\forall (a;b;x;y) \in \mathbb{R}^4)\ :\ (a;b)*(x;y) = (ax+2by; bx+ay)$

0.5 (1) Montrer que l'opération $*$ est une loi de composition interne définie sur G

0.5 (2) Montrer que la loi $*$ est associative dans G

0.5 (3) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans G

0.5 (4) Montrer que $(G;*)$ est un groupe

II On considère l'ensemble $F = \left\{M(x;y) = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \ / \ (x;y) \in G\right\}$

Soit l'application définie par : $\begin{array}{rccc} f: & G & \longrightarrow & F \\ & (x;y) & \longmapsto & M(x;y) \end{array}$

1 (1) Montrer que l'application f est un isomorphisme de $(G;*)$ dans $(F;\times)$

0.5 (2) En déduire la structure de $(F;\times)$

(3) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

0.5 (a) Vérifier que $M \in F$

1 (b) Montrer que la matrice M admet un inverse dans $(F;\times)$ et déterminer son inverse M^{-1}

(c) On pose $M^1 = M$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ :\ M^{n+1} = M^n \times M$, montrer par récurrence que

1 $$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ :\ M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2} & \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} & \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2} \end{pmatrix}$$

1 (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,déterminer $(3;2)^n$ tel que $(3;2)^n = \underbrace{(3;2)*(3;2)*\cdots*(3;2)}_{n \text{ fois}}$

III On considère l'ensemble $E = \left\{M(x;y) = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \ / \ (x;y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

1 (1) Montrer que $(E;+)$ est un groupe commutatif

1 (2) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau unitaire

0.5 (3) On considère la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que $K^2 = 2.I_2$ ou $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

0.5 (4) Est-ce que $(E;+;\times)$ est un anneau intègre ? justifier votre réponse