Durée : 4 heures

## Exercice 01 : ( 05 points )

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, on considère l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - \left(1 + im + \overline{m}\right)z + \overline{m} + i|m|^2 = 0 \text{ , où } m \in \mathbb{C}^* - \{i\} .$$

0,25 1)- a)- Vérifier que $u = \overline{m}$ est solution de l'équation $(E)$

0,25 b)- En déduire que l'autre solution de l'équation $(E)$ est : $v = 1 + im$ .

2)- On suppose dans cette question que : $m = e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ .

0,5 ✔ Ecrire le nombre complexe $\frac{v}{u}$ sous forme trigonométrique .

3)- Dans le plan complexe on considère les points : $A(u)$ et $B(v)$ .

0,25 ✔ Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

4)- On suppose que : $m = a + \frac{1}{2}i$ où $a \in \mathbb{R}$ . et on considère la transformation $R$

Qui lie tout point $M(z)$ avec le point $M'(z')$ tel que : $z' = -iz + 1 + 2ia$

0,75 a)- Montrer que $R$ est une rotation en précisant l'affixe de son centre $\Omega$ et donner Une mesure de son angle .

0,5 b)- Montrer que : $R(A) = B$ , puis en déduire que : $\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = -i$ .

0,5 c)- Montrer que les points $O$ , $A$ , $B$ et $\Omega$ sont cocycliques .

## Exercice 02 : ( 04 points )

**EXERCICE2** :( 3.5 points)

**Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment.**

**PARTIE I :**

On considère dans $\mathbb{R}_+^2$ le système suivant : $(S)$: $\begin{cases} \sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{12}{5} \\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

1- Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$ une solution du système $(S)$. On pose : $z=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$

0.25 a) Montrer que : $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i$

0.75 b) Montrer que : $z^2-\left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)z+1=0$ , en déduire les valeurs possibles de $z$

( On remarque que : $\dfrac{28}{25}+\dfrac{96}{25}i=\left(\dfrac{2}{5}(4+3i)\right)^2$ )

0.25 c) En déduire les valeurs du couple $(x,y)$

0.5 2- Résoudre dans $\mathbb{R}_+^2$ le système $(S)$

**PARTIE II :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

Soit $(U)$ le cercle de centre $O$ et de rayon $1$ et $A(a)$ , $B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle $(U)$ deux à deux distincts.

0.25 1- Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C})$ ; $|z|=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$

0.5 2-a) La droite passant par $A$ et parallèle à $(BC)$ coupe le cercle $(U)$ au point $P(p)$

Montrer que : $p=\dfrac{bc}{a}$

0.5 b) La droite passant par $A$ et perpendiculaire à $(BC)$ coupe le cercle $(U)$ au point $Q(q)$ . Montrer que : $q=-p$

0.5 c) La droite passant par $C$ et parallèle à $(AB)$ coupe le cercle $(U)$ au point $R(r)$

Montrer que les deux droites $(PR)$ et $(OB)$ sont perpendiculaires.

2 Bac SM

**Exercice** : (Al Moufid exo 41 page 95)

Soit $\boldsymbol{z = x + iy}$ un élément de $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ avec $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que : $\mathbf{arg}\, \boldsymbol{z} \equiv \mathbf{2\, Arctan}\left(\dfrac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{z}| + \boldsymbol{x}}\right)\ [2\boldsymbol{\pi}]$