**Exercice 1** : ( 3 points )

On rappelle que $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire non commutatif.

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}\ /\ x\in\mathbb{R}\right\}$

0.5 1) Montrer que $E$ est une partie stable de $\left(M_3(\mathbb{R}),\times\right)$

0.5 2) a-Montrer que l'application $\varphi$ qui à tout nombre réel $x$ associe la matrice $M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\times)$ .

0.5 b- en déduire que $(E,\times)$ est un groupe commutatif.

0.5 c- Pour $x$ réel ,déterminer $M^{-1}(x)$ l'inverse de la matrice $M(x)$

0.5 d- résoudre dans l'ensemble $E$ l'équation $A^5X=B$ où $A=M(2)$ et $B=M(12)$ et $A^5=\underbrace{A\times..\times A}_{5\ \ fois}$

0.5 3) Montrer que l'ensemble $F=\left\{M(\ln(x))\ /\ x\in\mathbb{R}_+^*\right\}$ est sous-groupe de $(E,\times)$

**Exercice 1** : ( 3 points )

On rappelle que $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire non commutatif.

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix} / \ x\in\mathbb{R}\right\}$

0.5 1) Montrer que $E$ est une partie stable de $\left(M_3(\mathbb{R}),\times\right)$

0.5 2) a-Montrer que l'application $\varphi$ qui à tout nombre réel $x$ associe la matrice $M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\times)$ .

0.5 b- en déduire que $(E,\times)$ est un groupe commutatif.

0.5 c- Pour $x$ réel ,déterminer $M^{-1}(x)$ l'inverse de la matrice $M(x)$

0.5 d- résoudre dans l'ensemble $E$ l'équation $A^5X=B$ où $A=M(2)$ et $B=M(12)$

et $A^5=\underbrace{A\times..\times A}_{5\ \ fois}$

0.5 3) Montrer que l'ensemble $F=\left\{M(\ln(x)) / \ x\in\mathbb{R}_+^*\right\}$ est sous-groupe de $(E,\times)$

**Exercice 1** : ( 3 points )

On rappelle que $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire non commutatif.

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix} / \ x\in\mathbb{R}\right\}$

0.5 1) Montrer que $E$ est une partie stable de $\left(M_3(\mathbb{R}),\times\right)$

0.5 2) a-Montrer que l'application $\varphi$ qui à tout nombre réel $x$ associe la matrice $M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\times)$ .

0.5 b- en déduire que $(E,\times)$ est un groupe commutatif.

0.5 c- Pour $x$ réel ,déterminer $M^{-1}(x)$ l'inverse de la matrice $M(x)$

0.5 d- résoudre dans l'ensemble $E$ l'équation $A^5X=B$ où $A=M(2)$ et $B=M(12)$ et $A^5=\underbrace{A\times..\times A}_{5\ \ fois}$

0.5 3) Montrer que l'ensemble $F=\left\{M(\ln(x)) / \ x\in\mathbb{R}_+^*\right\}$ est sous-groupe de $(E,\times)$

**Exercice 1** : ( 3 points )

On rappelle que $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire non commutatif.

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix} / \ x\in\mathbb{R}\right\}$

0.5 1) Montrer que $E$ est une partie stable de $\left(M_3(\mathbb{R}),\times\right)$

0.5 2) a-Montrer que l'application $\varphi$ qui à tout nombre réel $x$ associe la matrice $M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\times)$ .

0.5 b- en déduire que $(E,\times)$ est un groupe commutatif.

0.5 c- Pour $x$ réel ,déterminer $M^{-1}(x)$ l'inverse de la matrice $M(x)$

0.5 d- résoudre dans l'ensemble $E$ l'équation $A^5X=B$ où $A=M(2)$ et $B=M(12)$ et $A^5=\underbrace{A\times..\times A}_{5\ \ fois}$

0.5 3) Montrer que l'ensemble $F=\left\{M(\ln(x)) / \ x\in\mathbb{R}_+^*\right\}$ est sous-groupe de $(E,\times)$

**<u>Premier exercice</u>** :(4 points) **<u>Les deux parties sont indépendantes.</u>**

**<u>Première partie</u>** : Dans l'anneau $\left(M_3(\quad),+,\times\right)$ on considère les deux matrices suivantes :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ et } A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(On pose : $A^0=I$ et $A^1=A$ et $A^2=A\times A$ et $A^{n+1}=A^n\times A$ pour tout $n$ de $\quad$)

0.5 1-Montrer que : $\left(\forall k\in \quad\right)$ $A^{2k}=I$

0.5 2-Montrer que $A$ admet une matrice inverse $A^{-1}$ que l'on déterminera.

**<u>Premier exercice</u>** :(4 points) **<u>Les deux parties sont indépendantes.</u>**

**<u>Première partie</u>** : Dans l'anneau $\left(M_3(\quad),+,\times\right)$ on considère les deux matrices suivantes :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ et } A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(On pose : $A^0=I$ et $A^1=A$ et $A^2=A\times A$ et $A^{n+1}=A^n\times A$ pour tout $n$ de )

0.5 1-Montrer que : $(\forall k\in\ )\quad A^{2k}=I$

0.5 2-Montrer que $A$ admet une matrice inverse $A^{-1}$ que l'on déterminera.

**Premier exercice** :(4 points) **Les deux parties sont indépendantes.**

**Première partie** : Dans l'anneau $\left(M_3(\ ),+,\times\right)$ on considère les deux matrices suivantes :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ et } A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(On pose : $A^0=I$ et $A^1=A$ et $A^2=A\times A$ et $A^{n+1}=A^n\times A$ pour tout $n$ de )

0.5 1-Montrer que : $(\forall k\in\ )\quad A^{2k}=I$

0.5 2-Montrer que $A$ admet une matrice inverse $A^{-1}$ que l'on déterminera.

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle $0$ et dont l'unité est la matrice identique $I$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On pose $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x & -3y\\ y & x\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

2) a) Montrer que $E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

3) On pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$ et on considère l'application $\varphi$ de $\mathbb{C}^*$ vers $E^*$ définie par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\quad \varphi(x+iy)=M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

a) Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$

b) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

c) Montrer que $J^{2017}=\varphi(3^{1008}\sqrt{3})$ puis déterminer l'inverse de $J^{2017}$ dans $(E^*,\times)$.

4) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

## Exercice 4 : ( 3.5 pts )

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z}^*,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

**1 - a)** Montrer que $E$ est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$

**b)** Vérifier que pour tout $a$ , $b$ , $c$ et $d$ de $\mathbb{Z}$, on a :

$M(a,b)\times M(c,d)=M(ac+3bd,ad+bc)$

**c)** Montrer que : $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

**2 -** Soit $\varphi$ l'application définie de $E$ vers $\mathbb{Z}$ par :

$(\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2)\,;\,\varphi\left(M(a,b)\right)=\left|a^2-3b^2\right|$

Monter que $\varphi$ est un homomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{Z},\times)$

## Exercice 4 : ( 3.5 pts )

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité
$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z}^*, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

**1 - a)** Montrer que $E$ est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$

**b)** Vérifier que pour tout $a$ , $b$ , $c$ et $d$ de $\mathbb{Z}$, on a :

$M(a,b) \times M(c,d) = M(ac + 3bd, ad + bc)$

**c)** Montrer que : $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

**2 -** Soit $\varphi$ l'application définie de $E$ vers $\mathbb{Z}$ par :

$(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2)\,;\, \varphi\left(M(a,b)\right) = \left|a^2 - 3b^2\right|$

Monter que $\varphi$ est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{Z}, \times)$

## Exercice 4 : ( 3.5 pts )

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z}^*,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

**1 - a)** Montrer que $E$ est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$

**b)** Vérifier que pour tout $a$ , $b$ , $c$ et $d$ de $\mathbb{Z}$, on a :

$M(a,b)\times M(c,d)=M(ac+3bd,ad+bc)$

**c)** Montrer que : $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

**2 -** Soit $\varphi$ l'application définie de $E$ vers $\mathbb{Z}$ par :

$(\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2)\,;\,\varphi\left(M(a,b)\right)=\left|a^2-3b^2\right|$

Monter que $\varphi$ est un homomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{Z},\times)$

**2 -** Soit $\varphi$ l'application définie de $E$ vers $\mathbb{Z}$ par :

$(\forall(a,b) \in \mathbb{Z}^2)\,;\ \varphi\left(M(a,b)\right) = \left|a^2 - 3b^2\right|$

Monter que $\varphi$ est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{Z}, \times)$

**3 -** Soit $M(a,b) \in E$

**a)** Montrer que $M(a,b) \times M(a,-b) = \left(a^2 - 3b^2\right).I$

**b)** Montrer que si $M(a,b)$ est inversible dans $(E, \times)$ alors $\varphi(M(a,b)) = 1$

**c)** On suppose que $\varphi(M(a,b)) = 1$

Montrer que $M(a,b)$ est inversible dans $(E, \times)$ et préciser son inverse

**4 - a)** Montrer que : $\forall(a,b) \in \mathbb{Z}^2\,;\ \varphi(M(a,b)) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

**b)** En déduire que l'anneau $(E, +, \times)$ est intègre.

**c)** Est-ce que $(E, +, \times)$ est un corps ? justifier votre réponse.