Mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe

uniquement pour sc math et sc physique

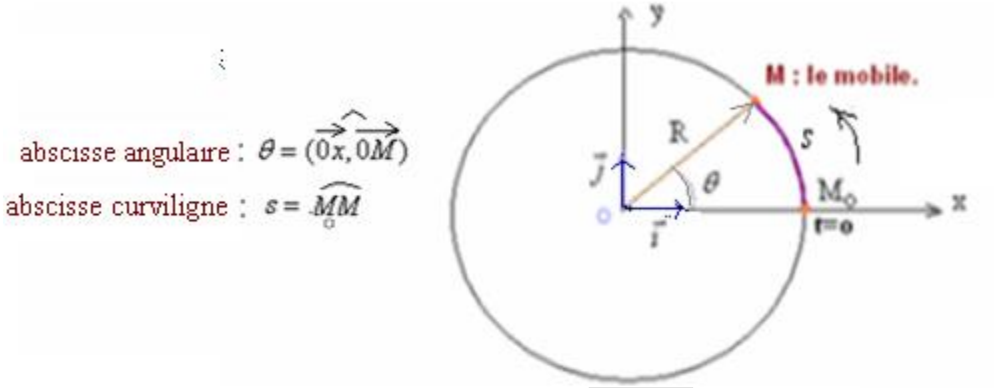
I- Abscisse curviligne et abscisse angulaire -vitesse linéaire et vitesse angulaire:

1) Rappel:

Un corps solide est en mouvement circulaire autour d'un axe fixe si tous ses points décrivent des trajectoires circulaires centrées sur cet axe (seuls les points situés sur cet axe sont immobiles).

2) Repérage de la position d'un mobile:

On repère la position d'un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) en utilisant l'abscisse curviligne ou bien l'abscisse angulaire.



Relation entre l'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire : $s = R.\theta$ (R : rayon du cercle).

3) La vitesse angulaire :

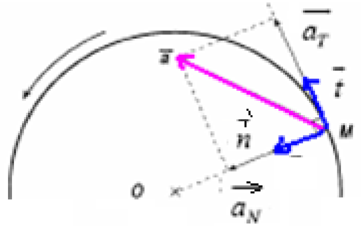
La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est la dérivée de l'abscisse angulaire par rapport au temps :/ $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ (en rad/s)

La vitesse linéaire : v , est la dérivée de l'abscisse curviligne par rapport au temps : $v = \frac{ds}{dt}$ (en m/s)

Relation entre la vitesse linéaire vitesse angulaire**:** on a : $s = R.\theta$ par dérivation : $\frac{ds}{dt} = R.\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow$ $v = R.\dot{\theta}$

4) Accélération angulaire et accélération linéaire :

L'accélération angulaire est la dérivée de la vitesse angulaire par rapport au temps : $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$ **(en rad/s^2)**



Dans le repère de Frenet le vecteur accélération : $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ possède deux composantes .

La composante tangentielle : $a_t = \frac{dv}{dt}$ avec: $v = R.\dot{\theta}$ donc : $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\dot{\theta})}{dt} = R.\frac{d\dot{\theta}}{dt} = R.\ddot{\theta} \Rightarrow$ $a_t = R.\ddot{\theta}$

La composante normale : $a_n = \frac{v^2}{R}$ avec: $v = R.\dot{\theta}$ donc : $a_n = R.\dot{\theta}^2$

II -Le principe fondamentale de la dynamique pour un corps en rotation autour d'un axe fixe:

1) Enoncé du PFD:

La somme des moments des forces extérieures qui s'éxercent sur un solide en rotation autour d'un axe fixe est égale au moment d'inertie du solide multiplié par son accélération angulaire.

$$\Sigma M\vec{F}_{ext/\Delta} = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

, J_Δ **:** Moment d'inertie du corps solide en (kg.m^2)

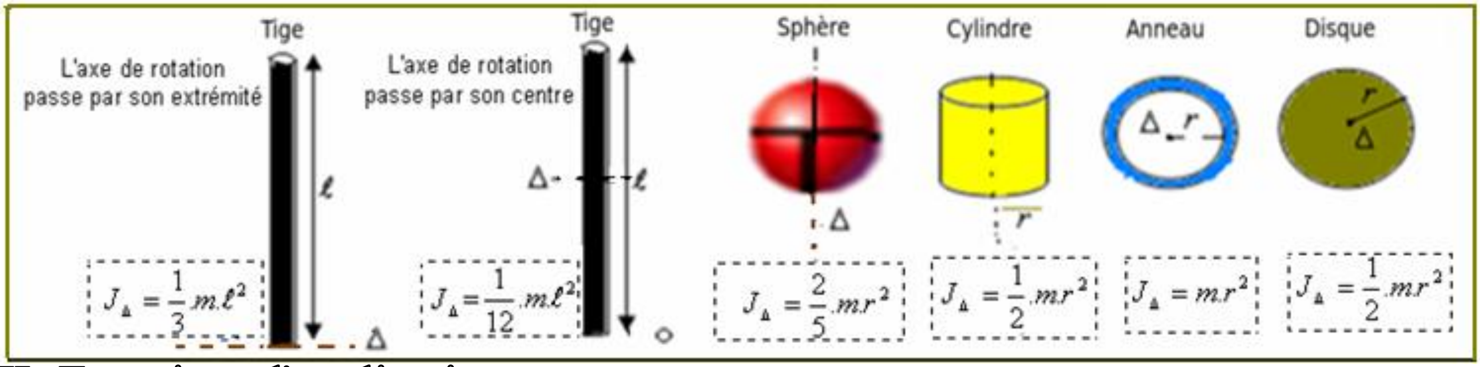
$\ddot{\theta}$: Accélération angulaire en (rad/s^2)

- Si $\ddot{\theta} = 0$, le solide est en **mouvement de rotation uniforme** ,équation horaire du mouvement est : $\theta = \dot{\theta} \cdot t + \theta_o$

-Si $\ddot{\theta} = C^{te}$; le solide est en **mouvement de rotation uniformément varié** , l'équation horaire du mouvement est ::

$\dot{\theta} = \ddot{\theta} \cdot t + \dot{\theta}_o$ et l'équation de la vitesse angulaire est: $\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta} \cdot t^2 + \dot{\theta}.t + \theta_o$

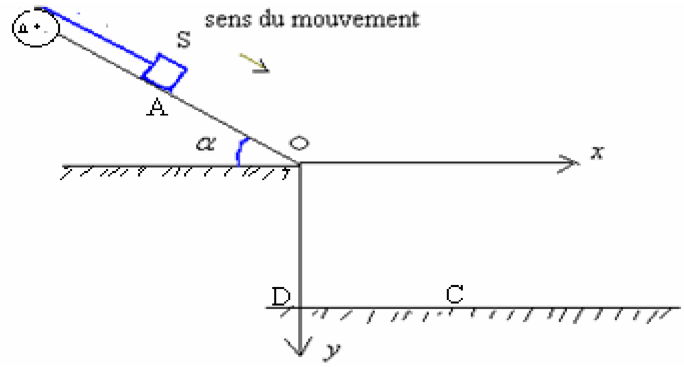
2) Expression du moment d'inertie de quelques corps solides:



II -Exercices d'applications:

1)Exercice n°1:

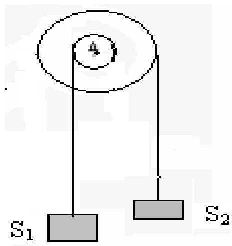
On considère un corps S de masse m= 0,25kg capable de glisser sans frottement sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30^o$ par rapport à la ligne horizontale.
Le corps S est fixé par extrémité inférieure à un fil inextensible de masse négligeable et enroulé sur un cylindre homogène de rayon r=5cm. capable de tourner sans frottement autour d'un axe horizontal et fixe Δ.
On donne : $J_\Delta = 2{,}5.10^{-3} kg.m^2$, $g = 10 m/s^2$.



1) On libère le corps S du point A sans vitesse initiale et il glisse sans frottement sur le plan incliné provoquant la rotation du cylindre.
   1-1- Déterminer l'accélération du corps S et en déduire la nature de son mouvement.
   1-2- Déterminer la vitesse v_1 du corps S au point O sachant que OA= 2m.
2) Au point O le fil se détache du cylindre à un instant t=0 et le corps S tombe au point C d'une altitude OD=75cm.
   2-1 - Donner les équations horaires du mouvement du centre d'inertie du corps S dans le repère (O,x,y) .
   2-2- En déduire :
   a) la durée de chute du corps S.
   b) La distance DC.
3) Lorsque le fil se détache du cylindre, ce dernier est soumis à un couple résistant de moment constant $M_\Delta = -7{,}5.10^{-2} N.m$ et il s'arrête de tourner après avoir effectué plusieurs tours.
   3-1-Déterminer l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du cylindre.
   3-2-Quel est le nombre de tours effectué par le cylindre durant le freinage.

2)Exercice n°2:

On considère une poulie à double gorge de rayons R_1=10cm et R_2=20cm qui peut tourner sans frottement autour d'un axe Δ fixe. Les deux corps S_1 et S_2 sont suspendus par deux fils inextensibles enroulés sur les poulies comme l'indique la figure.



On donne : , g=10m/s^2 . Moment d'inertie de la poulie à double gorge : $J_\Delta = 2.10^{-2} kg.m^2$
1) Déterminer l'expression de m_2 en fonction de m_2 , R_1 et R_2 pour que la poulie reste en équilibre..
2) On utilise par la suite m_1=1kg et m_2=0,7kg puis on libère le système sans vitesse initiale à un instant t=0.
   2-1- a) Déterminer le sens du mouvement.
   b) Montrer que l'accélération angulaire du système des deux poulies {P_1+P_2} est:

$$\ddot{\theta} = \frac{g(m_2.R_2 - m_1.R_1)}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + J_\Delta}$$

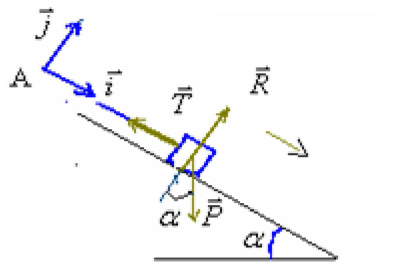
   2-2- Calculer sa valeur.
   2-3- Quel est le nombre de tours effectués par le système des deux poulies {P_1+P_2} pendant la durée t=2s ?

1) Correction de l'exercice n°1:

1) 1-1- . Le système étudié (le corps S)

Bilan des forces : les forces qui s'exercent sur le corps C sont :

- $\vec{P}$: poids du corps C..
- $\vec{R}$: réaction du plan incliné sur le corps C .
- $\vec{T}$: tension du fil.



On considère un repère $(A,\vec{i},\vec{j})$ que l'on considère galiléen.

. Application de la deuxième loi de Newton $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \quad \Rightarrow \quad \vec{P}+\vec{R}+\vec{T} = m.\vec{a}_G$

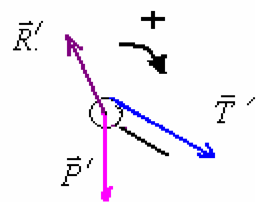
.Par projection de la relation précédente sur l'axe ox on a: $P.\sin\alpha + 0 - T = m.a \Rightarrow$ $T = m.(g.\sin\alpha - a)$

$a_y=0$ pas de mouvement selon oy donc : $a=a_x$

. Le système étudié (la poulie P)

.Bilan des forces : les forces qui s'exercent sur la poulie sont :

- $\vec{P}'$: poids de la poulie.
- $\vec{R}'$: réaction de l'axe de rotation sur la poulie.
- $\vec{T}'$: tension du fil. (force exercée par le fil sur la poulie)



. Application du principe fondamental de la dynamique : $\sum M_{F_\Delta} = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$M(\vec{P}'_{/\Delta}) + M(\vec{R}'_{/\Delta}) + M(\vec{T}'_{/\Delta}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$ on a : $M(\vec{P}'_{/\Delta}) = 0$, $M(\vec{R}'_{/\Delta}) = 0$

donc : $M(\vec{T}'_{/\Delta}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$ avec: $M_\Delta(\vec{T}'_{/\Delta}) = +T'\times r$

$\Rightarrow \quad T'\times r = J_\Delta.\ddot{\theta}$ avec: $\ddot{\theta} = \dfrac{a}{r}$ d'où: $T' = \dfrac{J_\Delta.a}{r_2}$

Or le fil est inextensible, il garde la même tension en tous ses points, donc : $T = T'$ $\Rightarrow$ $m.(g.\sin\alpha - a) = \dfrac{J_\Delta.a}{r^2}$

donc: $m.g.\sin\alpha = a(m + \dfrac{J_\Delta}{r^2})$ d'où: $a = \dfrac{m.g.\sin\alpha}{m + \dfrac{J_\Delta}{r^2}} = \dfrac{0{,}25\times 10.\sin 30}{0{,}25 + \dfrac{2{,}5.10^{-3}}{(5.10^{-2})^2}} = 1m/s^2$

1-2- Le corps S se déplace sur une trajectoire rectiligne avec une accélération constante donc son mouvement est rectiligne uniformément varié.

L'équation horaire du mouvement est : $x = \dfrac{1}{2}.a.t^2 + v_o.t + x_o$ avec : $a=1m/s^2$, $v_o=0$ et $x_o=0$. donc : $x=0{,}5.t^2$

Au point O on a : x= =OA= 2m. donc $OA=0{,}5.t^2$ le temps mis pour parcourir cette distance: $t_1 = \sqrt{\dfrac{OA}{0{,}5}} = \sqrt{\dfrac{2}{0{,}5}} = 2s$

L'équation de la vitesse est : $v=a.t+v_o$ avec: $v_o=0$ donc : $v=a.t$

En remplaçant dans l'équation de la vitesse : $v_1 = a\times t_1 = 1\times 2 = 2m/s$

Autre méthode : En appliquant la relation indépendante de temps entre A et O : $v_O^2 - v_A^2 = 2.a(x_O - x_A) \quad \Rightarrow$

$0 - v_A^2 = 2.a.AO$ d'où: $v_A = \sqrt{2.a.AO} = \sqrt{2\times 1\times 2} = 2m$

Autre méthode : En appliquant le théorème de l'énergie cinétique sur le corps S entre O et A :

$\Delta E_{c\,A\to O} = \Sigma W\vec{F}_{A\to O} \quad \Rightarrow \quad Ec_O - Ec_A = W\vec{P}_{A\to O} + W\vec{R}_{A\to O} + W\vec{T}_{A\to O} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}.m.v_O^2 - \dfrac{1}{2}.m.v_A^2 = m.g.AO.\sin\alpha + 0 - T\times AO$ donc:

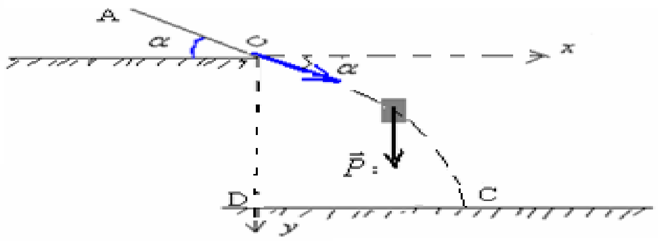
$v_O^2 = v_A^2 + 2.g.AO\sin\alpha - \dfrac{2.T\times AO}{m}$; d'où ; $v_O = \sqrt{v_A^2 + 2.g.AO.\sin\alpha - \dfrac{2.T.AO}{m}} = \sqrt{0 + 2\times 10\times 2\times 0{,}5 - \dfrac{2\times 1\times 2}{0{,}25}} = 2m$

car : $T = m(g\sin\alpha - a) = 0{,}25\times(10\times 0{,}5 - 1) = 1N$

2)-2-1 Au point O, représentons le vecteur vitesse $\vec{v}_O$ du corps S qui est devenue un projectile.

On a : $v_{Ox} = v_O.\cos\alpha$, $v_{Oy} = v_O.\sin\alpha$ et à t=0 , $x_o=0$, $y_o=0$,

Lorsque le corps S quitte le point O avec une vitesse v_O il est soumis uniquement à l'action de son poids.



En appliquant la 2ème loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{P} = m.\vec{a}_G}$ **(1)**

Par projection de **(1)** sur l'axe ox: $0 = m.a_x \Rightarrow \quad a_x = 0$ d'où : $\dfrac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = C^{te} = v_{ox}$ donc : $v_x = v_O.\cos\alpha$

Le corps S se déplace selon l'axe ox sur une trajectoire rectiligne avec une accélération nulle donc son mouvement est rectiligne uniforme.

L'équation horaire du mouvement selon ox : $\boxed{x = v_O.\cos\alpha.t}$ car : $x_o=0$ donc : $x = 2.\cos 30 \times t$ d'où : $\boxed{x = \sqrt{3}\times t}$

Par projection sur l'axe oy: $+P = ma_y \Rightarrow \quad a_y = g$ d'où : $\dfrac{dv_y}{dt} = g \Rightarrow v_y = g.t + v_{oy}$ donc : $v_y = g.t + v_O.\sin\alpha$

Le corps S se déplace selon l'axe ox sur une trajectoire rectiligne avec une accélération constante donc son mouvement est rectiligne uniformément varié. .

L'équation horaire du mouvement selon oy: $y = \dfrac{1}{2}.a_y.t^2 + v_{oy}.t + y_o \quad \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{1}{2}g.t^2 + v_O \sin\alpha..t}$ donc: $\boxed{y = 5t^2 + t}$

2-2- a) Soit t_C la durée de chute :

Lorsque le corps arrive au point C , on a $y_C=y_D=OD=0,75m$ donc: $0,75=5t^2+t$ d'où: $5t^2+t-0,75=0$

$\boxed{t_C = \dfrac{-1+4}{10} = 0,3s}$ l'autre solution négative est impossible.

b) au point C , $x_C=DC$ donc : $\boxed{DC = \sqrt{3}\times t_C = \sqrt{3}\times 0,3 \approx 0,52m}$

3) 3-21Lorsque le fil se détache du cylindre, il n'est soumis qu'à l'action de son poids, la réaction de l'axe et le couple résistant. En appliquent le principe fondamentale de la dynamique

$$\Sigma M\vec{F}_\Delta = J_\Delta.\ddot{\theta} \Rightarrow M\vec{P}_\Delta + M\vec{R}_\Delta + M_\Delta = J_\Delta.\ddot{\theta} \text{ donc : } 0 + 0 + M_\Delta = J_\Delta.\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{M_\theta}{J_\Delta} = \frac{-7,5.10^{-2}}{2,5.10^{-3}} = -30 rad/s^2}$$

3-2- L'accélération angulaire est constante donc le mouvement de rotation est uniformément varié.

Equation horaire du mouvement : $\theta = \dfrac{1}{2}\ddot{\theta}\cdot t^2 + \dot{\theta}t + \theta_o$ et l'équation de la vitesse angulaire : $\dot{\theta} = \ddot{\theta}\cdot t + \dot{\theta}_o$

A l'instant où le fil se coupe : $\dot{\theta}_o = \dfrac{vo}{r} = \dfrac{2}{5.10^{-2}} = 40 rad/s$ et : $\theta_o = 0$

donc: $\theta = -15\cdot t^2 + 40t$ et: $\dot{\theta} = -30\cdot t + 40$

A la fin du freinage : $\dot{\theta}_f = 0 \Rightarrow 0 = -30\cdot t_f + 40$ d'où la durée du freinage : $t_f = \dfrac{40}{30} = \dfrac{4}{3}s$

qui correspond à : $\Delta\theta = -15\cdot t_f{}^2 + 40t_f = -15\times\dfrac{16}{9} + 40\times\dfrac{4}{3} \approx 26,7rad$ et on a : $\Delta\theta = 2.\pi.n$ donc: $n = \dfrac{\Delta\theta}{2.\pi} = \dfrac{26,7}{2.\pi} \approx 4,25$

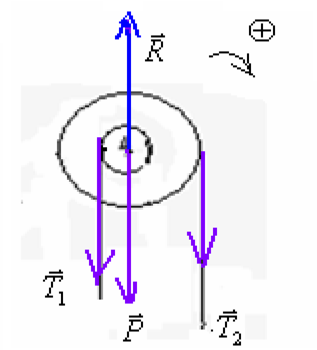
2) Correction de l'exercice n°2:

1) Si le système $\{P_1+P_2\}$ est en équilibre , les deux corps S_1 et S_2 sont aussi en équilibre

Etude de l'équilibre de $\{P_1+P_2\}$.

-Le système $\{P_1+P_2\}$ est soumis à l'action des forces suivantes:

- $\vec{P}$: poids du système.
- $\vec{R}$: réaction de l'axe de rotation.
- $\vec{T}_1$: tension du fil (1)
- $\vec{T}_2$: tension du fil (2)



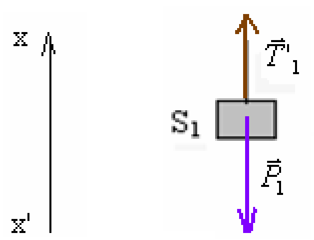
Condition d'équilibre: $\Sigma M\vec{F}_\Delta = 0 \Rightarrow M\vec{P}_\Delta + M\vec{R}_\Delta + M\vec{T}_{1\Delta} + M\vec{T}_{2\Delta} = 0$ En choisissant le sens positif de rotation :

$0 + 0 - T_1.R_1 + T_2.R_2 = 0 \Rightarrow \boxed{T_1.R_1 = T_2.R_2}$

-Système étudié {le corps S_1}

-Bilan des forces : le corps S_1 est soumis à l'action des forces suivantes:

- $\vec{P}_1$: poids du corps S_1.
- $\vec{T}'_1$: tension du fil(1).



Condition d'équilibre: $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{T}_1' = \vec{0}$

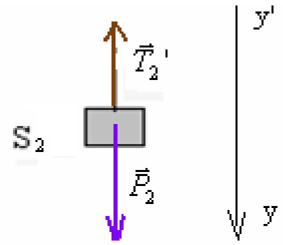
Choisissons un axe (x', x) orienté dans le sens du mouvement :

Par projection de la relation précédente sur l'axe (x',x) on a : $-P_1 + T_1' = 0 \Rightarrow \boxed{T_1' = P_1 = m_1.g}$

-Système étudié {le corps S_2}

-Bilan des forces : le corps S_2 est soumis à l'action des forces suivantes:

- $\vec{P}_2$: poids du corps S_2.
- $\vec{T'}_2$: tension du fil(2).



Condition d'équilibre: $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{T}_2' = \vec{0}$

Choisissons un axe (x', x) orienté dans le sens du mouvement :

Par projection de la relation précédente sur l'axe (y', y) on a : $P_2 - T_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_2' = P_2 = m_2.g}$

Le fil (1) est inextensible donc $T_1=T_2$ de même pour le fil (2) donc : $T'_1=T'_2$

La première relation devient : $m_1.g.R_1=m_2.g.R_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = m_1\dfrac{R_1}{R_2}$ R_1=10cm et R_2=20cm donc : $m_2 = \dfrac{m_1}{2}$

-Si $m_2 > \dfrac{m_1}{2}$ Le système se mettra en rotation dans le sens des aiguilles d'une montre.

-Si $m_2 < \dfrac{m_1}{2}$ Le système se mettra en rotation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

---

2) 2-1. On a m_1=1kg et m_2=0,75kg ,Donc $m_2 > \dfrac{m_1}{2}$ le système se met en rotation dans le sens des aiguilles d'une montre.

Pour le système {P_1+P_2} le principe fondamental de la dynamique s'écrit:

$$M\vec{P}_\Delta + M\vec{R}_\Delta + M\vec{T}_{1\Delta} + M\vec{T}_{2\Delta} = J_\Delta.\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad -T_1.R_1 + T_2.R_2 = J_\Delta.\ddot{\theta} \quad \textbf{(1)}$$

Pour le système {S_1} en appliquant la deuxième loi de Newton: $\vec{P}_1 + \vec{T}'_1 = m_1.\vec{a}_1$

Par projection sur (x,x') $\quad -P_1 + T'_1 = m_1.a_1 \quad \Rightarrow \quad T'_1 = m_1(g + a_1)$

Pour le système {S_2} en appliquant la deuxième loi de Newton: $\vec{P}_2 + \vec{T}'_2 = m_2.\vec{a}_2$

Par projection sur (y,y') : $\quad P_2 - T'_2 = m_2.a_2 \quad \Rightarrow \quad T'_2 = m_2(g - a_2)$

Lorsque le système des deux poulies tourne d'un angle θ, le corps S_2 se déplace d'une distance y et S_1 d'une distance x :

et $\theta = \dfrac{x}{R_2} = \dfrac{y}{R_1}$ par dérivation : $\dot{\theta} = \dfrac{v_2}{R_2} = \dfrac{v_1}{R_1}$ et par dérivation $\ddot{\theta} = \dfrac{a_2}{R_2} = \dfrac{a_1}{R_1}$: avec a_1 accélération de S_1 et a_2 celle de S_2.

d'où: $\quad a_2 = R_2.\ddot{\theta} \quad$ et: $\quad a_1 = R_1.\ddot{\theta}$

Le fil (1) est inextensible donc $T_1=T_2$ de même pour le fil (2) donc : $T'_1=T'_2$

Donc la relation (1) devient $\quad -m_1R_1.g - m_1.R_1^2.\ddot{\theta} + m_2R_2.g - m_2.R_2^2.\ddot{\theta} = J_\Delta.\ddot{\theta} \Rightarrow -m_1(g + R_1.\ddot{\theta})R_1 + m_2(g - R_2.\ddot{\theta}).R_2 = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad g(-m_1.R_1 + m_2..R_2) = \ddot{\theta}.(J_\Delta + m_1.R_1^2 + m_2R_2^2) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{g(m_2.R_2 - m_1.R_1)}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + J_\Delta}$$

2-2- A.N : $\ddot{\theta} = \dfrac{10.(0,7\times 0,2 - 1\times 0,1)}{1\times 0,1^2 + 0,7\times 0,2^2 + 2.10^{-2}} = \dfrac{0,4}{0,058} = \dfrac{1}{0,145} \approx 6,9 rad/s^2$

2-3- L'accélération angulaire est constante donc le mouvement de rotation est uniformément varié.

Equation horaire du mouvement : $\theta = \dfrac{1}{2}\ddot{\theta}\cdot t^2 + \dot{\theta}t + \theta_o$ avec $\dot{\theta}_o = 0$ et $\theta_o = 0$

d'où: $\theta = \dfrac{1}{2}\ddot{\theta}\times t^2$ et : $\theta = 2.\pi.n$ donc : $\dfrac{1}{2}\ddot{\theta}\times t^2 = 2.\pi.n$ donc : $n = \dfrac{\ddot{\theta}\times t^2}{4.\pi} = \dfrac{1\times 2^2}{0,145\times 4.\pi} \approx 2,2$

----

pr. **SBIRO Abdelkrim**

dimanche 24 mars 2019