Rappel sur la géométrie dans L'espace

$\mathcal{E}$ rapporté à un repère or. norm $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

→ $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ colinaires

$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$

→ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinaire $\Leftrightarrow$ L'un des 3 déterminant non nul

→ $\vec{u}(x,y,z)$, et $\vec{v}(x',y',z')$, $\vec{w}(x'',y'',z'')$ coplanaires

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

Exemple :

$\vec{u}(1,2,3)$, $\vec{v}(2,5,3)$ et $\vec{w}(3,7,6)$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (30-21) - 2(12-21) + 3(6-15)$$

$$= 0$$

d'ou $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ ~~sont~~ coplanaire.

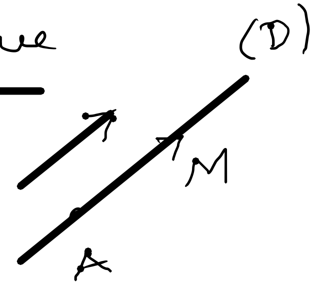
Rq $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{w}$ (coplaine.

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaire

→ Droites dans L'espace.

$D(A, \vec{u}(a,b,c))$ $\vec{u}$: vecteur directeur

* Une representation parmetrique



$$(D)\begin{cases} x = x_A + a.t \\ y = y_A + b.t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_A + c.t \end{cases}$$

$M(x,y,z) \in (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$

$\vec{AM} = t\,\vec{u}$

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

* deux equations cartésienne

$$(D) : \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$$

Rq

Si $a = 0$ alors

$$(D) : \begin{cases} x - x_A = 0 \\ \dfrac{y - y_A}{b} = \dfrac{z - z_A}{c} \end{cases}$$

* PLan dans L'espace

$P(A, \vec{u}, \vec{v})$

Position de 2 plans

$P(A,\vec{u},\vec{v})$ et $Q(B,\vec{w},\vec{t})$

$\Downarrow$

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$ et $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{t})=0$

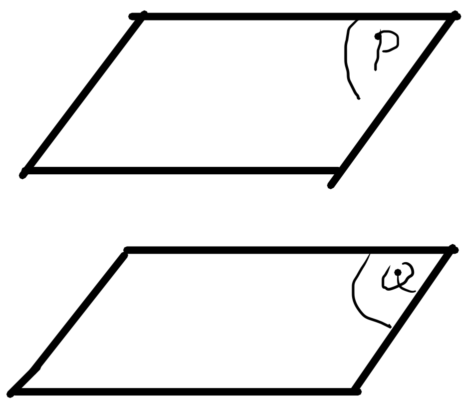
$\Downarrow$

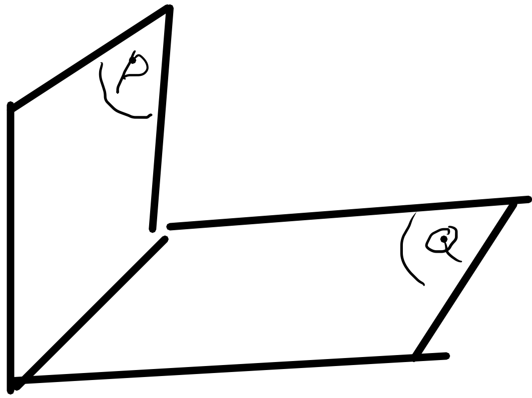
$(P) \parallel (Q)$

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\neq 0$ ou $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{t})\neq 0$

$\Downarrow$

(P) sont secants





la droite d'intersection
on résout le système

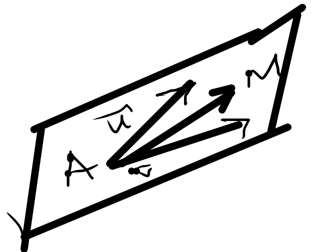
$$\begin{cases} (P) & ax+by+cz+d=0 \\ (Q) & a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

* représentation paramétrique

$$(P) = \begin{cases} x = \underbrace{x_A}_{A} + a.t + a't' \\ y = y_A + b.t + b't' \\ z = z_A + \underbrace{c.t}_{\vec{u}} + \underbrace{c't}_{\vec{v}} \end{cases} \quad (t,t') \in \mathbb{R}^2$$

Preuve

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}}$$



$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t'a' \\ t'b' \\ c'c' \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

* equation du plan

$(P)\ ax + by + cz + d = 0$

$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$

Exemple

$P\left(A\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right)$

déterminer une equation cartésienne du plan.

Rép : soit $M(x,y,z) \in (P)$

$M \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -3 & 1 \\ y-4 & 0 & 3 \\ z-1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (y-4)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

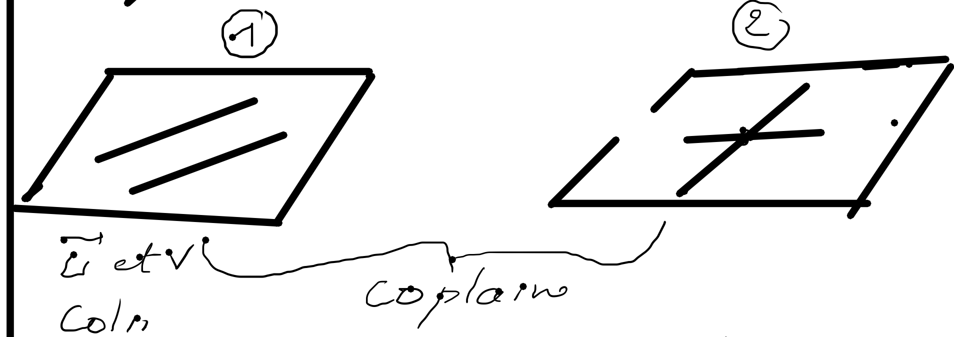
$\Leftrightarrow -6(x-2) + 8(y-4) - 9(z-1) = 0$

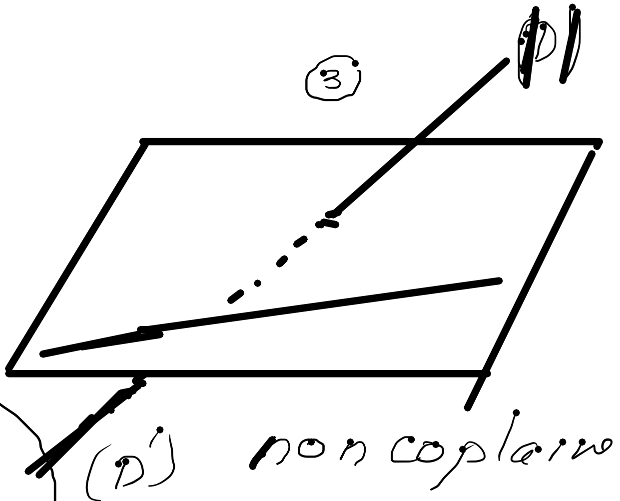
$\Leftrightarrow -6x + 8y - 9z + 12 - 32 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{-6x + 8y - 9z - 11 = 0}$

Position relative.

$\rightarrow$ 2 droites





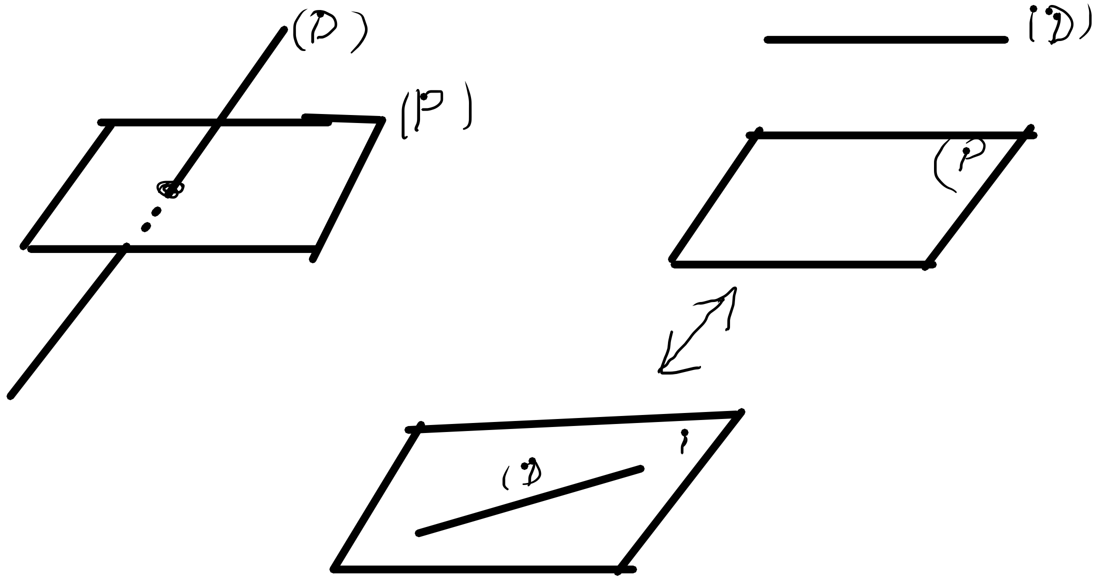
Position d'une droite et plan

$D(A, \vec{u})$ $\quad$ $P(B, \vec{v}, \vec{w})$

$$\Downarrow$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

- $= 0$: $(D) \parallel (P)$
- $\neq 0$: (D) coupe (P) en un point



$$(D) \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \qquad (P) : ax + by + cz + d = 0$$

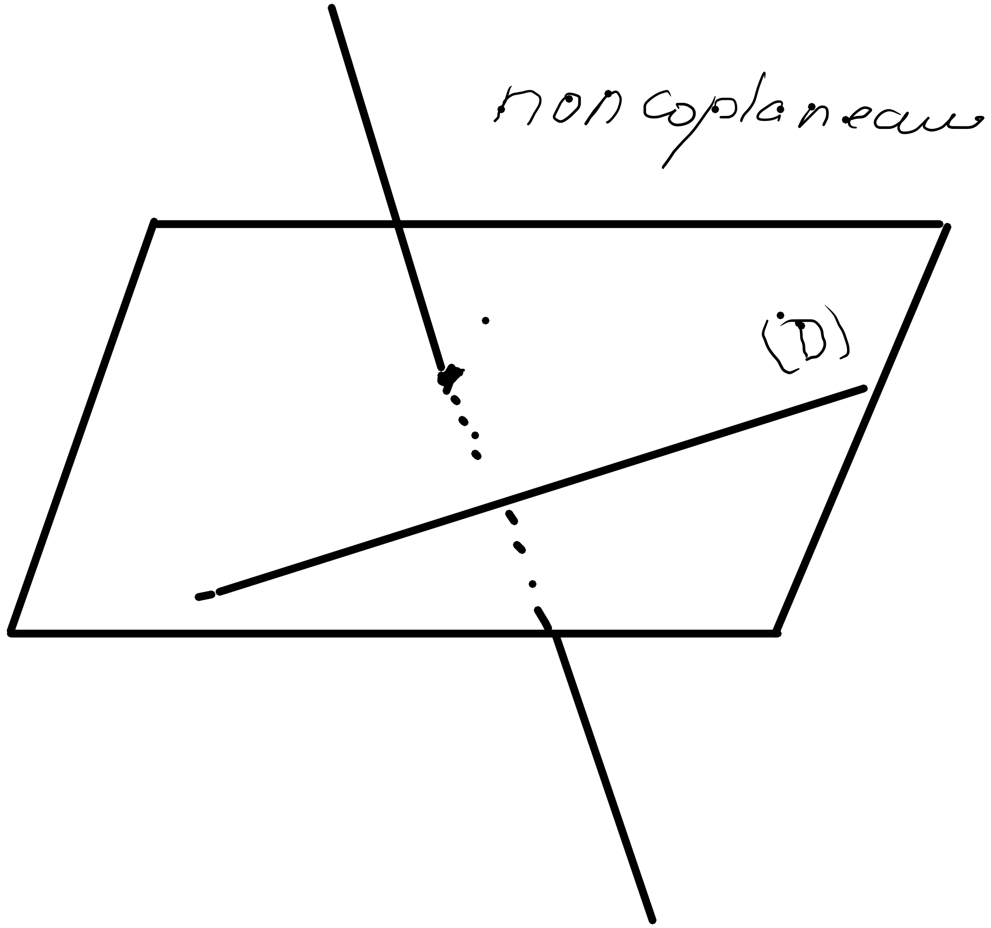
et on cherche t

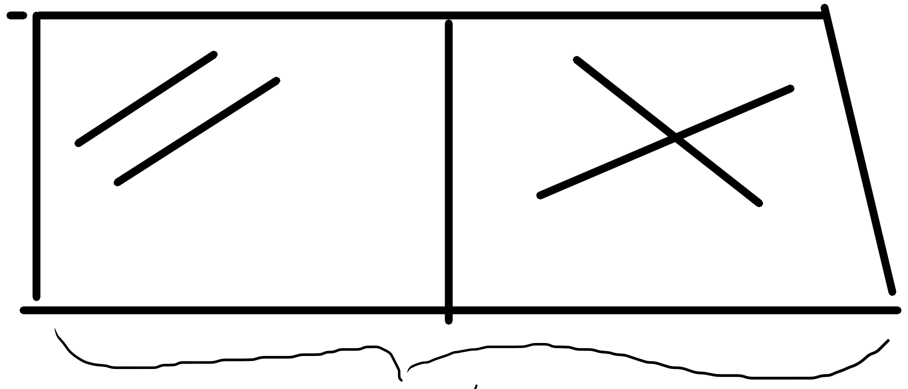
$D(A,\vec{u})$ et $D'(B,\vec{v})$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinaires
  $\Downarrow$
  $(D) \,//\, (D')$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinaire
  $\Downarrow$
  $\det(\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v})$
  - $= 0$
    $\Downarrow$
    (D) et (D') secante
  - $\neq 0$
    $\Downarrow$
    (D) et (D') non coplanaire

non coplaneaux





coplanaux

Géométrie dans l'espace

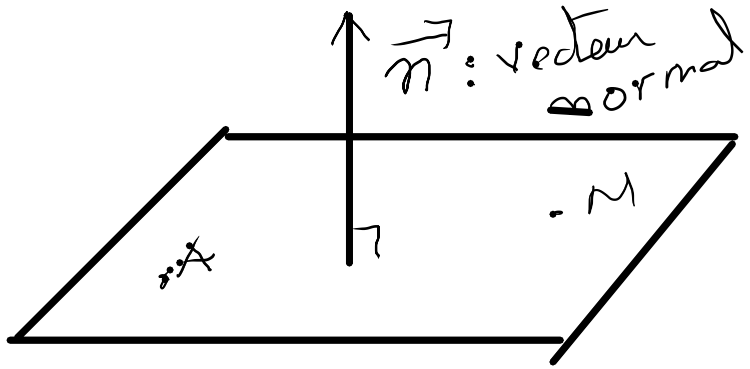
2BACS-2020/2021

Forme analytique du : -Produit scalaire : -Norme d'un vecteur : - Distance : – Produit vectoriel :	L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ Soient $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ • $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ • $\\|\vec{u}\\| = \sqrt{x^2+y^2+y^2}$ • $\\|\overrightarrow{AB}\\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$ • $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$
propriétés	• $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v}=0$ • $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff \vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

Géométrie dans l'espace

Forme analytique du : -Produit scalaire : -Norme d'un vecteur : - Distance : – Produit vectoriel :	L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ Soient $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ • $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ • $\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{x^2+y^2+y^2}$ • $\lVert\overrightarrow{AB}\rVert = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$ • $\cancel{\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}\vec{k}$
propriétés	• $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0$ • $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff$ $\cancel{\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}}$ les trois determinants $= 0$

propriétés	• $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0$ • $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires* $\iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$	
Droite $D(A,\vec{u})$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(a,b,c)$	**Représentation paramétrique de la droite (D) :**	$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \quad (t \in IR) \\ z = z_A + ct \end{cases}$
	~~**Distance d'un point M à la droite (D) :**~~	$\cancel{d(M,(D)) = \frac{\lVert \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \rVert}{\lVert \vec{u} \rVert}}$
Plan dans l'espace	**Equation cartésienne d'un plan (P)** $(P):\ ax + by + cz + d = 0$ $\iff \vec{n}(a,b,c)$ *est un vecteur normal au plan* (P)	
	Distance d'un point Ω au plan (P) :	$d(\Omega,(P)) = \frac{\lvert ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d \rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$



Exemple :

Déterminer l'équation du plan passant par $A(4,2,1)$ et vecteur normal $\vec{n}(5,4,-2)$

1ère Méthode

puisque $\vec{n}(5,4,-2)$ est un vecteur normal à (P) Alors l'équation du plan est

$$(P)\quad 5x + 4y - 2z + d = 0$$

et comme $A \in (P)$

$$5 \times 4 + 4 \times 2 - 2 \times 1 + d = 0$$

$$\Rightarrow d = -26$$

D'où : $\boxed{5x + 4y - 2z - 26 = 0}$

2e Méthode

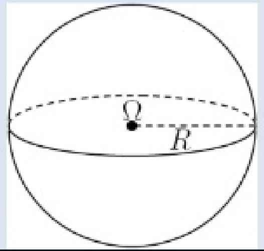
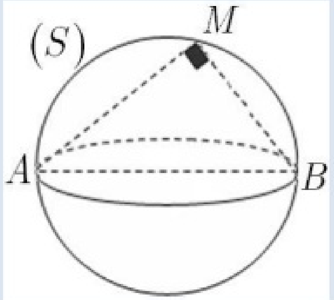
$$M(x,y,z) \in (P) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} x-5 \\ y-4 \\ z+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff 5(x-5) + 4(y-4) - 2(z-2) = 0$$

$$5x + 4y - 2z - 26 = 0$$

propriétés	• $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0$ • $\vec{u}\ et\ \vec{v}\ sont\ colinéaires \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
Droite $D(A, \vec{u}\,)$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$	Représentation paramétrique de la droite (D) : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \quad (t \in IR) \\ z = z_A + ct \end{cases}$ Distance d'un point M à la droite (D) : $d(M, (D)) = \frac{\lVert \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \rVert}{\lVert \vec{u} \rVert}$
Plan dans l'espace	Equation cartésienne d'un plan (P) $(P)\colon\ ax + by + cz + d = 0$ $\iff \vec{n}(a, b, c)\ est\ un\ vecteur\ normal\ au\ plan\ (P)$ Distance d'un point Ω au plan (P) : $d(\Omega, (P)) = \frac{\lvert ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Sphère	Equation cartésienne d'une sphère (S) de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R : (S) : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$ 
	➢ On détermine l'équation cartésienne d'une sphère (S) dont $[AB]$ est l'un de ses diamètres en utilisant l'équivalence suivant : $M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ 

Exemple①: Equation de La sphere

$$S\,(\Omega(2,-1,3),\ R=2)$$

$$(S) : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 2^2$$

$$x^2-4x+4 + y^2+2y+1 + z^2-6z+9 = 4$$

$$(S)\ x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+10=0$$

Exemple :

equation de la sphere de diametre $[AB]$

$$A(2,3,-1)\ ,\ B(2,1,0)$$

$$M(x,y,z) \in (S) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$$

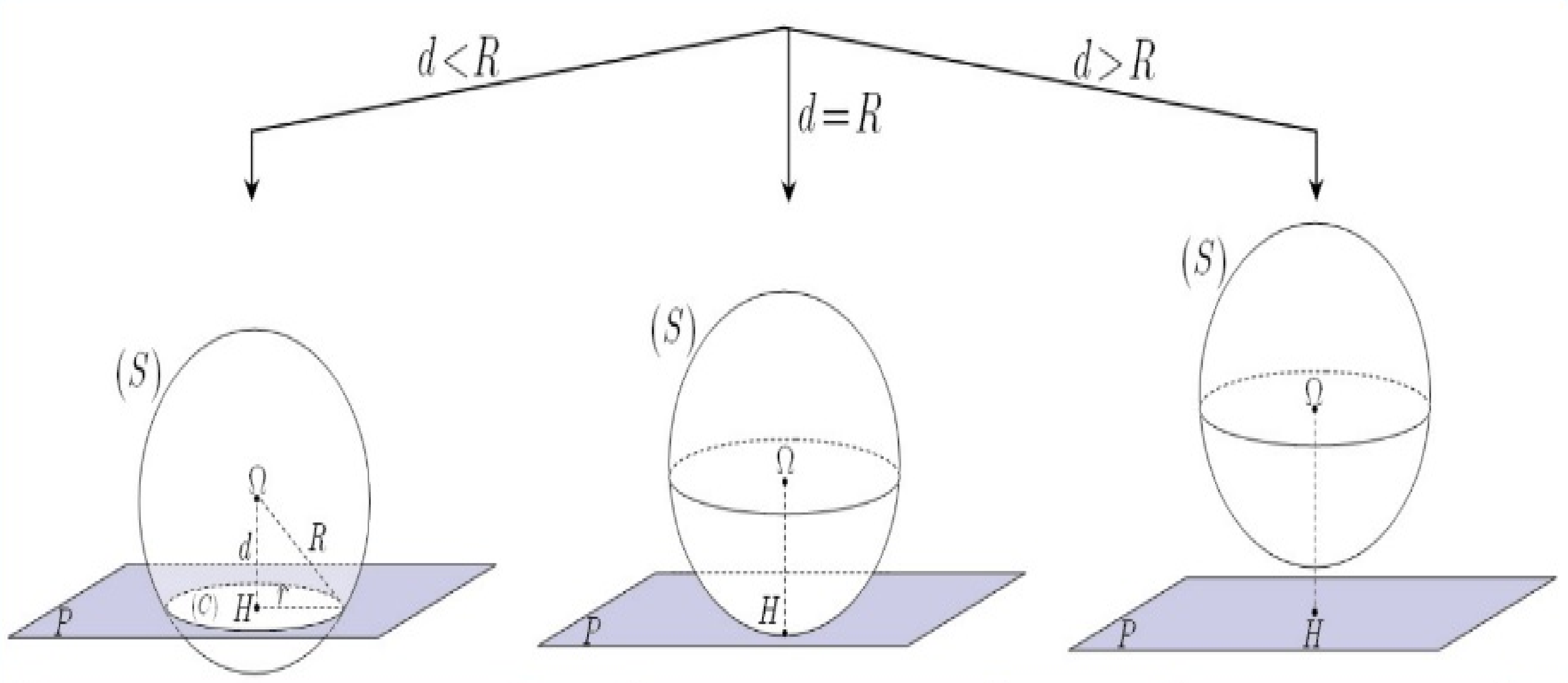
$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)(y-1) + (z+1)z = 0$$

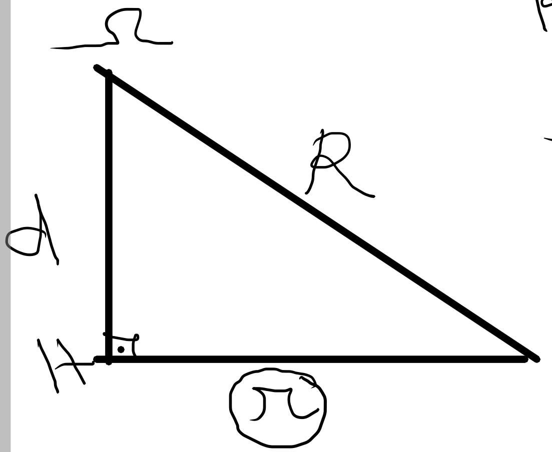
on developp

❖ Intersection d'une sphère $S(\Omega, R)$ et d'un plan (P) :

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur le plan (P), on pose $d = \Omega H = d(\Omega,(P))$

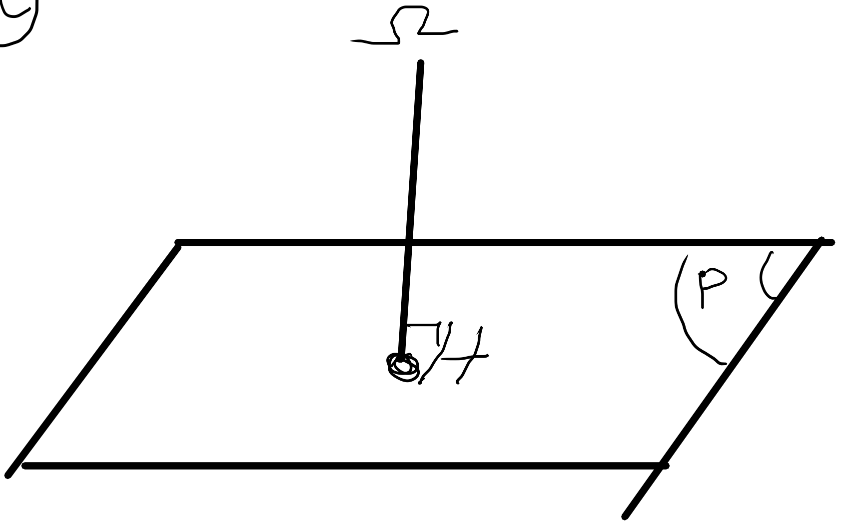


Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$	Le plan (P) est tangent à la sphère (S) en H	Le plan (P) ne coupe pas la sphère (S)



$$R^2 = d^2 + r^2$$

$$r^2 = \sqrt{R^2 - d^2}$$



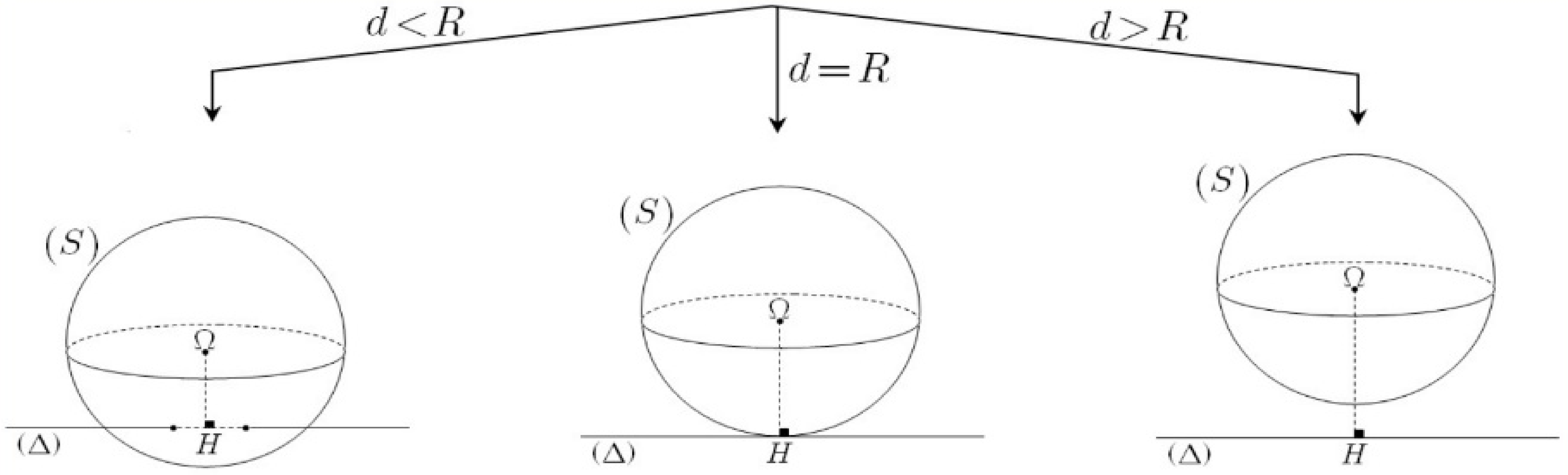
$$\begin{cases} x = x_\Omega + a \cdot t \\ y = y_\Omega + b \cdot t \\ z = z_\Omega + c \cdot t \end{cases}$$

on remplace dans l'équation du plan

Equation cartésienne d'un plan (P) tangent à une sphère S(Ω ,R) en un point A	<u>Méth1 :</u> **on utilise l'équivalence :** $M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$ <u>Méth2 :</u> $\overrightarrow{A\Omega}$ **est un vecteur normal au plan (P) … etc**

❖ Intersection d'une sphère $S(\Omega, R)$ et d'une droite (D) :

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur la droite (D) , on pose $\boldsymbol{d = \Omega H = d(\Omega, (D))}$



La droite (D) coupe la sphère (S) en deux points distincts

La droite (D) est tangente à la sphère (S) en H

La droite (D) ne coupe pas la sphère (S)