Exercice Numero 4 : (12,00 points)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1cm$.

1 On appliquant le théorème des accroissement finis à la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[x\,;\,x+1]$, Montrer que :

$$(P) : \quad (\forall x > 0) \; ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

2 **a** En utilisant la proposition (P), Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

Examen 2020 Normal.

Soit $x>0$

ona $t \to Ln(t)$ est continue sur $[x,x+1]$ (car...

et derivable sur $]x,x+1[$ (car...

d'apres T.A.F $\exists c \in]x,x+1[$

telle que $\frac{\ln(x+1)-Ln(x)}{x+1-x} = Ln'(c) = \frac{1}{c}$

. ona $x < c < x+1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$

donc $\frac{1}{x+1} < \frac{Ln(x+1)-ln(x)}{1} < \frac{1}{x}$

d'ou $\frac{1}{x+1} < Ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

d'ou $(\forall x>0)$, $\frac{1}{x+1} < Ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

2/ a $\lim_{0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$= \lim_{0^+} x^2 Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

ona $(\forall x>0)$

$\frac{1}{x+1} < Ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} < x^2 Ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < x$

ona $\lim_{0^+} \frac{x^2}{x+1} = 0$

$\lim_{0^+} x = 0$

donc :

$\lim_{0^+} x^2 Ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$

d'ou f est derivable à droite de 0

■ **Exercice Numéro 4 : (12,00 points)**

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1cm$.

0,5 **1** On appliquant le théorème des accroissement finis à la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[x\,;\,x+1]$, Montrer que :

$$(P) : \quad (\forall x > 0) \;;\; \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

0,50 **2 a** En utilisant la proposition (P), Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

1°/ Soit $x>0$ on a $\ln$ est continue sur $[x,x+1]$ (car ....

et dérivable sur $]x,x+1[$ (car ....

et $(\forall t>0)$ $\ln'(t) = 1/t$

$\forall t \in]x,x+1[$ on a $\frac{1}{x+1} < 1/t < \frac{1}{x}$

donc d'après I.A.F

$\frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x+1} < \ln(1+1/x) < 1/x$

2/a) $\lim_{0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{0^+} x^2 \ln(1+1/x)$

et comme $(\forall x>0)$ $\frac{1}{x+1} < \ln(1+1/x) < 1/x$

$\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{x+1} < x^2\ln(1+1/x) < x$

et on a $\lim_{0^+} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{0^+} x = 0$

Alors $\lim_{0^+} x^2\ln(1+1/x) = 0$

donc $\lim_{0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$

Alors f ~~est~~ dérivable à droite de 0

$f'_d(0) = 0$ et (C_f) admet un demi tangente horizontale à droite du point $O(0,0)$

0,25 **b** En utilisant la proposition (P), Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

0,50 **3** **a** Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$(\forall x>0) \quad ; \quad f'(x)=3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)$$

0,25 **b** En déduire que la fonction f est strictement croissante sur I . (On pourra utiliser la proposition (P))

0,25 **c** Dresser le tableau de variation de f.

4 On pose : $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$; $\forall x \in]0,+\infty[$

0,50 **a** Vérifier que : $\forall x \in]0,+\infty[$; $g'(x)=2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)$

0,25 **b** En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

0,50 **c** Montrer que l'équation $g(x)=1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique notée α puis vérifier que $\alpha \in]1,2[$.

0,50 **d** En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x)=x$ sont : 0 ; α

b) $f(x)=x^3 Ln(1+1/x)$

$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} x^3 Ln(1+1/x)$

on a $(\forall x>0)$ $\quad \frac{1}{x+1} < Ln(1+1/x) < \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \quad \frac{x^3}{x+1} < x^3 Ln(1+1/x)$

et comme $\lim_{+\infty} \frac{x^3}{x+1} = \lim_{+\infty} x^2 = +\infty$

Alors $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$

on a $\forall x>0$ $\quad \frac{x^3}{x+1} < f(x)$

d'où $\quad \frac{f(x)}{x} > \frac{x^2}{x+1}$

et comme $\lim_{+\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{+\infty} x = +\infty$

Alors : $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$a \leq x \leq b$

$\Longrightarrow x \geq a$

3) a) on a la fonction $x \longrightarrow x^3$ est derivable sur $]0,+\infty[$ (car ...
et $x \longrightarrow 1+1/x$ derivable et str positive sur $]0,+\infty[$
Alors $x \longrightarrow Ln(1+1/x)$ est derivable sur $]0,+\infty[$
d'où f est derivable sur $]0,+\infty[$

0,25	**b**	En utilisant la proposition (P), Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique dont on précisera la direction.
0,50	**3** **a**	Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $$(\forall x>0) \quad ; \quad f'(x)=3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)$$
0,25	**b**	En déduire que la fonction f est strictement croissante sur I . (On pourra utiliser la proposition (P))
0,25	**c**	Dresser le tableau de variation de f.
	4	On pose : $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$; $\forall x \in]0,+\infty[$
0,50	**a**	Vérifier que : $\forall x \in]0,+\infty[$; $g'(x)=2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)$
0,25	**b**	En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
0,50	**c**	Montrer que l'équation $g(x)=1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique notée α puis vérifier que $\alpha \in]1,2[$.
0,50	**d**	En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x)=x$ sont : 0 ; α

(b) $\lim\limits_{+\infty} f(x)$

on a : $(\forall x>0)$ $\dfrac{1}{x+1} < \ln(1+1/x)$

$\Longleftrightarrow \dfrac{x^3}{x+1} < x^3 \ln(1+1/x)$

donc $(\forall x>0)$ $f(x) > \dfrac{x^3}{x+1}$

et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3}{x+1} = \lim x^2 = +\infty$

donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$?

on a $(\forall x>0)$ $f(x) > \dfrac{x^3}{x+1}$

donc $\dfrac{f(x)}{x} > \dfrac{x^2}{x+1}$

et $\lim \dfrac{x^2}{x+1} = \lim\limits_{+\infty} x = +\infty$

donc (C_f) admet une B.P de direction l'axe (oy) au $V(+\infty)$

3 a

$f(x) = x^3 \ln(1+\frac{1}{x})$

b

on a $\forall x>0$

$\dfrac{1}{x+1} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \dfrac{1}{x}$

et $(\forall x>0)$ $\dfrac{1}{x+1} > \dfrac{1}{3(x+1)}$

donc

$\dfrac{1}{3(x+1)} < \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

d'où $\ln(1+\frac{1}{x}) - \dfrac{1}{3(x+1)} > 0$

et on a $(\forall x>0)$ $3x^2 > 0$

donc $(\forall x>0)$

$f'(x) > 0$

d'où f est str ↗

0,25 **b** En utilisant la proposition (P), Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

0,50 **3** **a** Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$(\forall x > 0) \quad ; \quad f'(x) = 3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)}\right)$$

0,25 **b** En déduire que la fonction f est strictement croissante sur I .
(On pourra utiliser la proposition (P))

0,25 **c** Dresser le tableau de variation de f.

4 On pose : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$; $\forall x \in]0,+\infty[$

0,50 **a** Vérifier que : $\forall x \in]0,+\infty[$; $g'(x) = 2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)}\right)$

0,25 **b** En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

0,50 **c** Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique notée α puis vérifier que $\alpha \in]1,2[$.

0,50 **d** En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x) = x$ sont : 0 ; α

4) $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

a) calcul

b) l'inegalité

c) La bijection · T.V.I

d)

0,25 **b** En utilisant la proposition (P), Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

0,50 **3** **a** Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)$$

0,25 **b** En déduire que la fonction f est strictement croissante sur I . (On pourra utiliser la proposition (P))

0,25 **c** Dresser le tableau de variation de f.

4 On pose : $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$; $\forall x\in]0,+\infty[$

0,50 **a** Vérifier que : $\forall x\in]0,+\infty[$; $g'(x)=2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)$ ✓

0,25 **b** En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. ✓

0,50 **c** Montrer que l'équation $g(x)=1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique notée α puis vérifier que $\alpha\in]1,2[$. ✓

0,50 **d** En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x)=x$ sont : 0 ; α ✓

b/ On a d'après question ①

$(\forall x>0)\quad \dfrac{1}{x+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$

et on sait $\forall x>0$

$\dfrac{1}{x+1}>\dfrac{1}{3(x+1)}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{3(x+1)}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$\Longrightarrow \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{3(x+1)}>0$

et on a $3x^2>0$

donc $\forall x>0$ $f'(x)>0$

d'où f est str croissante

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

ⓒ La bijection

$(\forall x>0)\quad f'(x)=\left(x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'$

$=(x^3)'\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'\cdot(x^3)$

$=3x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\cdot x^3$

$=3x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\dfrac{-x}{1+\frac{1}{x}}=3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{3(1+x)}\right)$

0,25 **5** **a** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$.
(On précisera la demi-tangente à droite en 0 et la branche parabolique de $(\mathcal{C})$)

0,50 **b** Montrer que f est une bijection de I vers I.
(On note f^{-1} sa bijection réciproque)

2ème Partie : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \quad ; \quad \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ 0 < u_0 < \alpha \end{cases}$$

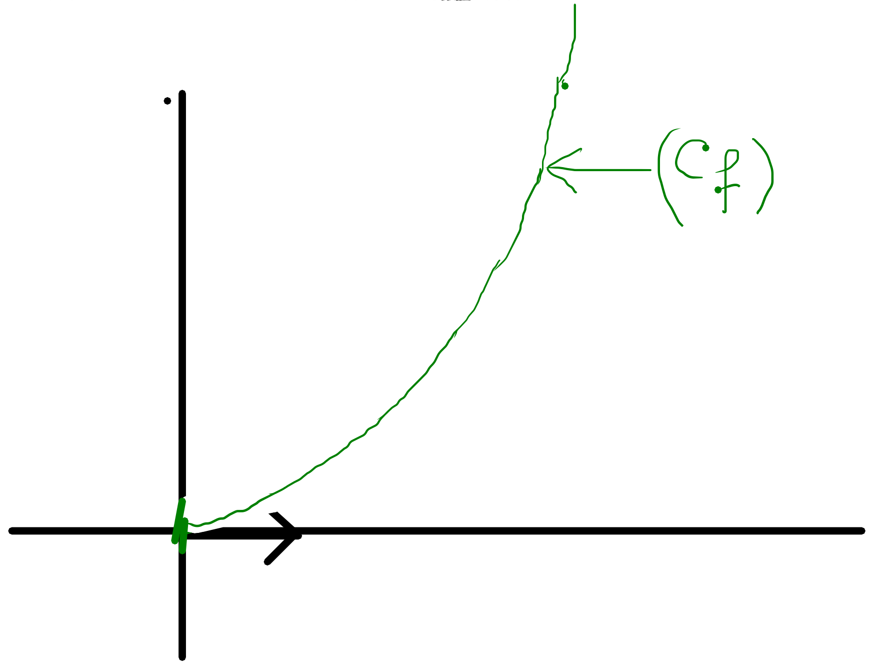
0,50 **1** Montrer par récurrence : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$; $0 < u_n < \alpha$.

0,50 **2** **a** Montrer que : $g(]0,\alpha[) =]0,1[$.

0,25 **b** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

0,25 **c** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

0,25 **3** Déterminer la limite : $\lim_{n\infty}(u_n)$



$u_{n+1} > u_n$

$f^{-1}(u_n) > u_n$

$u_n > f(u_n)$

$\frac{f(u_n)}{u_n} < 1$

$g(u_n) < 1$

$u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ $\qquad u_{n+1} = g(u_n)$

$f'(a) = 0$

$A(a, f(a))$

$y = f(a)$

$g(x) = \frac{f(x)}{x}$

$g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 1$

$f(\alpha) = \alpha$

1°/ $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

pour $n = 0$ on a $0 < u_0 < \alpha$

soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose que $0 < u_n < \alpha$

et M q $0 < u_{n+1} < \alpha$

on a $0 < u_n < \alpha$

et f^{-1} est continue et strictement ↗ (car f est ↗. sur $]0,+\infty[$

Alors $f^{-1}(0) < f^{-1}(u_n) < f^{-1}(\alpha)$

$0 < u_{n+1} < \alpha$ (car $f(\alpha) = \alpha$)

D'où d'après principe de récurrence

$(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < u_n < \alpha$

2) a) $g(]0,\alpha[) =]\lim_{0^+} g(x), g(\alpha)[=]0,1[$ (g est continue et ~~str~~ ↗ sur ℝ)

0,25 **5 a** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$.
(On précisera la demi-tangente à droite en 0 et la branche parabolique de $(\mathcal{C})$)

0,50 **b** Montrer que f est une bijection de I vers I .
(On note f^{-1} sa bijection réciproque)

2ème Partie : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f^{-1}(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 < u_0 < \alpha \end{cases}$$

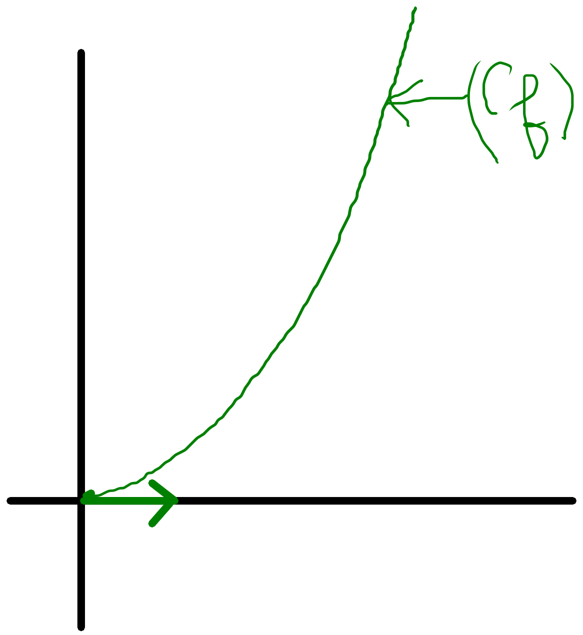
0,50 **1** Montrer par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < \alpha$.

0,50 **2 a** Montrer que : $g(]0,\alpha[) =]0,1[$.

0,25 **b** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

0,25 **c** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

0,25 **3** Déterminer la limite : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$



5 b évident .

2e partie

$f^{-1}(x) = x \iff f(x) = x$

$\iff x = \alpha$

$$\begin{cases} u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \\ 0 < u_0 < \alpha \end{cases}$$

1°/

b on a $u_n \in]0,\alpha[$

donc $g(u_n) \in]0,1[$

$\iff 0 < \frac{f(u_n)}{u_n} < 1$

$\iff f(u_n) < u_n$

$\iff u_n < f^{-1}(u_n)$

$\iff u_n < u_{n+1}$

donc (u_n) est $\nearrow$

0,25 **5 a** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$.
(On précisera la demi-tangente à droite en 0 et la branche parabolique de $(\mathcal{C})$)

0,50 **b** Montrer que f est une bijection de I vers I .
(On note f^{-1} sa bijection réciproque)

2ème Partie : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 < u_0 < \alpha \end{cases}$$

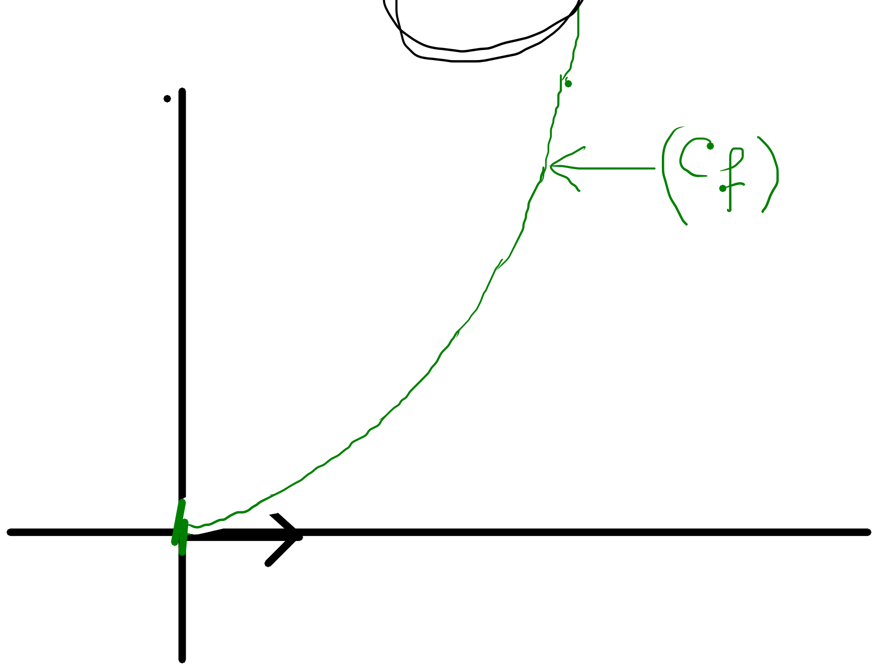
0,50 **1** Montrer par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < \alpha$.

0,50 **2 a** Montrer que : $g(]0,\alpha[) =]0,1[$.

0,25 **b** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

0,25 **c** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

0,25 **3** Déterminer la limite : $\lim\limits_{n \infty}(u_n)$



$U_{n+1} > U_n$

$f^{-1}(U_n) > U_n$

$U_n > f(U_n)$

$\dfrac{f(U_n)}{U_n} < 1$

$g(U_n) < 1$

b) on a $g\,]0,\alpha[=]0,1[$

et on a $U_n \in]0,\alpha[$

donc $g(U_n) \in]0,1[$

$\Leftrightarrow \quad 0 < g(U_n) < 1$

$\Leftrightarrow \quad 0 < \dfrac{f(U_n)}{U_n} < 1$

$\Rightarrow \quad f(U_n) < U_n$

$\Leftrightarrow \quad U_n < f^{-1}(U_n)$

$\Leftrightarrow \quad U_n < U_{n+1}$

$f'(\alpha) \simeq 0$

3ème Partie : On considère la fonction F définie sur I par :

$$(\forall x \in I) \quad : \quad F(x) = \int_x^1 f(t)dt$$

0,25 **1** **a** Étudier suivant les valeurs de x le signe de la quantité $F(x)$.

0,50 **b** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I.

0,25 **c** Et déterminer sa dérivée première F'.

0,50 **d** En déduire que F est strictement décroissante sur l'intervalle I.

0,25 **2** **a** Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\; ; \; F(x) \leq (1-x)\ln 2$.

0,50 **b** En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{x \to +\infty} F(x)$

0,50 **3** **a** En utilisant la méthode d'intégration par parties, Montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad ; \quad F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1}\right)dt$$

1) a) $(x>0)$ $F(x) = \int_x^1 f(t).dt$ ona f est continue sur $]0,+\infty[$

$\rightarrow$ si $0 < x \leq 1$ ona $f(t) \geq 0$ $t>0$

$\Rightarrow \int_x^1 f(t)dt \geq 0$

$\Leftrightarrow F(x) \geq 0$

$\rightarrow$ si $x > 1$ ona f est continue et $f>0$ sur $]0,+\infty[$

$\int_1^x f(t)dt \geq 0$

$\Leftrightarrow \int_x^1 f(t)dt \leq 0$

$\Leftrightarrow F(x) \leq 0$

b) $F(x) = -\int_1^x f(t)dt$

ona f est continue sur I

et $x \longrightarrow \int_1^x f(t).dt$

est sa primitive qui s'annule en 1

donc : F est dérivable

c) $(\forall x \in I)$ $F'(x) = -\left(\int_1^x f(t)dt\right)'$

$F'(x) = -f(x)$

ona $(\forall x \in I)$ $f(x) \geq 0$

donc $-f(x) \leq 0$

$F'(x) \leq 0$

Rappel

$F(x) = \int_a^x f(t).dt$

- F est la primitive de f qui s'annule en a

- F est dérivable

$F' = f$

$F(x) = [G(t)]_a^x$

$F'(x) = (G(x) - G(a))'$

$= f(x)$

d'ou F est str decroissante

3ème Partie : On considère la fonction F définie sur I par :

$$(\forall x \epsilon I) \quad : \quad F(x) = \int_x^1 f(t)dt$$

0,25 **1 a** Étudier suivant les valeurs de x le signe de la quantité $F(x)$.

0,50 **b** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I .

0,25 **c** Et déterminer sa dérivée première F' .

0,50 **d** En déduire que F est strictement décroissante sur l'intervalle I .

0,25 **2 a** Montrer que : $\forall x \epsilon]0,+\infty[\; ; \quad F(x) \leq (1-x)\ln 2$.

0,50 **b** En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

0,50 **3 a** En utilisant la méthode d'intégration par parties, Montrer que :

$$\forall x \epsilon]0,+\infty[\quad ; \quad F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1}\right)dt$$

$\forall x \in]0,+\infty[\quad F(x) = \int_x^1 f(t).dt$

si $x \geq 1$ on a f continue et $(\forall t \in I)\ f(t) \geq 0$

donc $\int_1^x f(t).dt \geq 0$

$\Rightarrow -F(x) \geq 0$

$\Rightarrow F(x) \leq 0$

si $x \in [0,1]$ on aura

$F(x) \geq 0$

x	$0 \qquad 1 \qquad +\infty$
$F(x)$	$+ \quad 0 \quad -$

1/ b) on a f est continue sur I

et F est la primitive

de la fonction $t \to -f(t)$

qui s'annule en 1 sur I

Alors F est dérivable sur I

c) $(\forall x \in I) \quad F'(x) = -f(x)$

d) on a

$(\forall x \in I)\ f(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow -f(x) \leq 0$

$\Leftrightarrow F'(x) \leq 0$

d'où F est str. $\downarrow$

sur I

2/ a)

Mq $\forall x \geq 1 \quad F(x) \leq (1-x)\ln 2$

Soit $x \geq 1$

on a $1 \leq t \leq x$

et f est continue

et str croissante sur I

Alors $f(1) \leq f(t)$

$\Rightarrow \ln(2) \leq f(t)$

3ème Partie : On considère la fonction F définie sur I par :

$$(\forall x \epsilon I) \quad : \quad F(x) = \int_x^1 f(t)dt$$

0,25 **1** **a** Étudier suivant les valeurs de x le signe de la quantité $F(x)$.

0,50 **b** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I .

0,25 **c** Et déterminer sa dérivée première F' .

0,50 **d** En déduire que F est strictement décroissante sur l'intervalle I .

0,25 **2** **a** Montrer que : $\forall x \epsilon \,]0,+\infty[\quad ; \quad F(x) \leq (1-x)\ln 2$.

0,50 **b** En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

0,50 **3** **a** En utilisant la méthode d'intégration par parties, Montrer que :

$$\forall x \epsilon \,]0,+\infty[\quad ; \quad F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1}\right)dt$$

donc $f(t) \geqslant f(1)$

c à d $f(t) \geqslant Ln(2)$

puisque f continue et $1 \leq x$

$$\int_1^x f(t)\,dt \geqslant \int_1^x Ln(2)\,dt$$

$\Leftrightarrow -F(x) \geqslant (x-1)Ln(2)$

$\Leftrightarrow$ $F(x) \leq (1-x)Ln(2)$

3/ⓐ

$$F(x) = \int_x^1 t^3 Ln\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$$

on pose $u' = t^3 \Leftrightarrow u =$

$v = Ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow v' =$

3ème Partie : On considère la fonction F définie sur I par :

$$(\forall x \epsilon I) \quad : \quad F(x) = \int_x^1 f(t)dt$$

0,25	**1 a**	Étudier suivant les valeurs de x le signe de la quantité $F(x)$.
0,50	**b**	Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I .
0,25	**c**	Et déterminer sa dérivée première F' .
0,50	**d**	En déduire que F est strictement décroissante sur l'intervalle I .
0,25	**2 a**	Montrer que : $\forall x \epsilon]0, +\infty[\quad ; \quad F(x) \leq (1-x)\ln 2$.
0,50	**b**	En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$
0,50	**3 a**	En utilisant la méthode d'intégration par parties, Montrer que :

$$\forall x \epsilon]0, +\infty[\quad ; \quad F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1}\right)dt$$

2) a) $\forall x \in]1, +\infty[\quad F(x) \leq (1-x)\ln(2)$

$F(x) = \int_x^1 t^3 \ln(1+1/t)\,dt$

f

on pose $g(x) = F(x) - (1-x)\ln(2)$

$g'(x) = -f(x) + \ln(2)$

$= \ln(2) - f(x)$

on a $x \geq 1$ on a $f \nearrow$

$f(x) \geq f(1)$

$f(x) \geq \ln 2$

$\ln(2) - f(x) \leq 0$

$g'(x) \leq 0$

g est decroissante

$x \geq 1$

$g(x) \leq g(1)$

$F(x) \leq (1-x)\ln 2$

2ème Methode

Soit $x \geq 1$

on a $1 \leq t \leq x$

et f est continue et $\nearrow$

$f(1) \leq f(t)$

$\Rightarrow f(t) \geq \ln 2$

$\Rightarrow \int_1^x f(t) \geq \int_1^x \ln 2\, dt$

$\Rightarrow -F(x) \geq (x-1)\ln 2$

$\Rightarrow \boxed{F(x) \leq (1-x)\ln 2}$

$\lim\limits_{+\infty} F(x) = -\infty$

car $\lim\limits_{+\infty} (1-x)\ln 2 = -\infty$

3ème Partie : On considère la fonction F définie sur I par :

$$(\forall x \in I) \ : \ F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$$

0,25	**1 a**	Étudier suivant les valeurs de x le signe de la quantité $F(x)$.
0,50	**b**	Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I.
0,25	**c**	Et déterminer sa dérivée première F'.
0,50	**d**	En déduire que F est strictement décroissante sur l'intervalle I.
0,25	**2 a**	Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\ ; \ F(x) \leq (1-x)\ln 2$.
0,50	**b**	En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$
0,50	**3 a**	En utilisant la méthode d'intégration par parties, Montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[\ ; \ F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1}\right)dt$$

$F(x) = [uv] - \int v'u\,dt$

$= \dots$ continue

3) a) Soit $x > 0$

$$F(x) = \int_x^1 t^3 . \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$$

On pose $U' = t^3 \longleftrightarrow U = t^4/4$

$V = \ln(1+1/t) \longleftrightarrow V' = \dfrac{-1/t^2}{1+1/t} = -\dfrac{1}{t(t+1)}$

0,25 **b** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1}\right)dt$; $\forall x \in]0,+\infty[$

On remarque que : $\dfrac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \dfrac{1}{1+t}$

0,50 **c** En déduire que :

$\forall x \in]0,+\infty[$: $F(x) = \dfrac{5}{24} - \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}\ln(1+x) - \dfrac{x^4}{4}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$\to 0$ $\quad = -\frac{1}{4} x f(x) \to 0$

0,50 **d** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$

4 On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

0,50 **a** Montrer l'inégalité suivante :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$: $\dfrac{-1}{2n} f\left(\dfrac{2k+1}{2n}\right) \le F\left(\dfrac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\dfrac{k}{n}\right) \le \dfrac{-1}{2n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \dfrac{5}{24}$ (car ......

En dehors $\quad \lim\limits_{0^+} \dfrac{x^4}{4}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{0^+} \dfrac{x}{4} f(x)$

$= 0$

On a f est continue sur $[0,+\infty[$

et F est la primitive de f qui s'annule en 1

donc F continue sur $[0,+\infty[$

donc F continue à droite de 0

$\lim\limits_{0^+} F(x) = F(0)$

$\dfrac{5}{24} = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$

(b) $\displaystyle\int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1}\right)dt = \int_x^1 \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt$

$= \left[\dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right]_x^1$

$= \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + 1 - \ln(2) - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)$

0,25 **b** Calculer l'intégrale $\int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1}\right) dt$; $\forall x \in]0,+\infty[$

On remarque que : $\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$

0,50 **c** En déduire que :

$\forall x \in]0,+\infty[$: $F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln(1+x) - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

0,50 **d** Calculer $\lim_{x\to 0^+} F(x)$, en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t)\,dt$

4 On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

0,50 **a** Montrer l'inégalité suivante :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$: $\frac{-1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \le F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \le \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

d/ $\lim_{0^+} F(x) = 5/24$ (car ...

On a F est continue sur $[0,+\infty[$

car F est derivable

donc F continue

à droite de 0

donc $\lim_{0^+} F(x) = F(0)$

et on a $F(0) = \int_0^1 f(t)dt$

et $\lim_{0^+} F(x) = 5/24$

Alors $\boxed{\int_0^1 f(t).dt = 5/24}$

4/ a Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.

on a F est cont. ... $\left[\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right]$

F deri ...

et $\forall x \in I$ $F'(x) = -f(x)$

0,25 **b** Calculer l'intégrale $\int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1}\right) dt$; $\forall x \in]0,+\infty[$

On remarque que : $\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$

0,50 **c** En déduire que :

$\forall x \in]0,+\infty[$: $F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln(1+x) - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

0,50 **d** Calculer $\lim_{x\to 0^+} F(x)$, en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t)\,dt$

4 On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

0,50 **a** Montrer l'inégalité suivante :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$: $\frac{-1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \le F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \le \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

d'apres I.A.F

$$-f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leqslant \frac{F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)}{1/2n} \leqslant -f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\iff \frac{-1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leqslant F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

on a $\forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right]$

$$-f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leqslant -f(x) \leqslant -f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,25 **b** Calculer l'intégrale $\int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1}\right)dt$; $\forall x \in]0,+\infty[$

On remarque que : $\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$

0,50 **c** En déduire que :

$\forall x \in]0,+\infty[$: $F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln(1+x) - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

0,50 **d** Calculer $\lim_{x\to 0^+} F(x)$, en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t)\,dt$

4 On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = \sum_{k=0}^{k=n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

0,50 **a** Montrer l'inégalité suivante :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$: $\frac{-1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$F(x) = \int_x^1 f(t).dt$

Soit $(n \in \mathbb{N}^*)$, $K \in [\![0, n-1]\!]$

On a F est continue sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right]$ (car ......

F est dérivable sur $\left]\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right[$ (car .....

d'après T.A.F $\exists c \in \left]\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right[$

$$\frac{F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{2n}} = -f(c)$$

one $\frac{k}{n} \leq c \leq \frac{2k+1}{2n}$

$-f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq -f(c) \leq -f\left(\frac{k}{n}\right)$

d'ou : le resultat

2eme Methode (Theoreme de la moyenne

one f est continue sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right]$

d'apres th. de la moyenne

$\exists c \in \left]\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right[$ $\int_{k/n}^{\frac{2k+1}{2n}} f(t) = \frac{1}{2n} \cdot f(c)$

0,25 **b** Calculer l'intégrale $\int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1}\right) dt$; $\forall\, x \in\,]0,+\infty[$

On remarque que : $\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$

0,50 **c** En déduire que :

$$\forall\, x \in\,]0,+\infty[\quad : \quad F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln(1+x) - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

0,50 **d** Calculer $\lim_{x \to 0^+} F(x)$, en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t)\, dt$

4 On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $v_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

0,50 **a** Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \; ; \; \forall\, k \in [\![0, n-1]\!] \quad : \quad \frac{-1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

4 On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = \sum_{k=0}^{k=n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

0,50 **a** Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; \forall k \in [\![0, n-1]\!] \; : \; \frac{-1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,25 **b** En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; : \; \frac{-1}{2n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq \frac{-1}{2n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On remarque que : $\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n}$

0,50 **c** Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.

4°/ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $v_n = \sum_{0}^{n-1} F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)$

b)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$

$$-\frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2n}\sum_{0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n}\sum_{0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad 1$$

On a $\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n}$

$$\sum_{0}^{n-1} \frac{2k+1}{2n} < \sum_{0}^{n-1} \frac{k+1}{n}$$

$$-\frac{1}{2n}\sum_{0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \geq -\frac{1}{2n}\sum f\left(\frac{k+1}{n}\right) \quad 2$$

1 et 2

$$-\frac{1}{2n}\sum_{0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n}\sum_{0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On pose $k' = k+1$

$k=0 \rightarrow k'=1$

$k=n-1 \rightarrow k'=n$

$$-\frac{1}{2n}\left(\sum_{1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n}\sum_{0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

4 On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad v_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \right)$

0,50 a Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; \forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad : \quad \frac{-1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,25 b En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad \frac{-1}{2n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On remarque que : $\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n}$

0,50 c Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.

c) on a f continue sur $[0,1]$

on pose $w_n = \frac{-1}{n} \sum_{1}^{n} f(k/n)$ et $t_n = \frac{-1}{n} \sum_{0}^{n-1} f(k/n)$

Alors (w_n) et (t_n) sont C.V (suite de Rieman)

et $\lim\limits_{+\infty} w_n = \lim\limits_{+\infty} v_n = \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{5}{24}$

donc (v_n) est C.V et $\lim\limits_{+\infty} v_n = 5/24$