I) Integrale d'une fonction continue

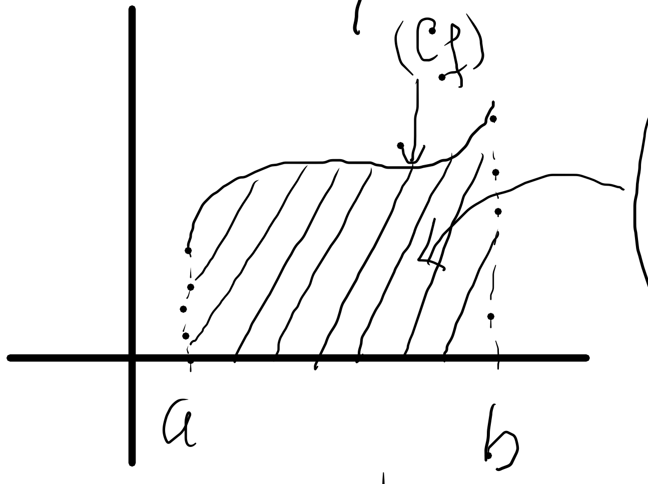
$\rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b$

$= F(b) - F(a)$

$\rightarrow f \geqslant 0$ sur $[a,b]$

$\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire de la partie du plan delelimitee par (C_f) et l'axe $(0x)$

et Les droites d'eq $x = a$ et $x = b$



$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$ u.A

$\rightarrow$ Proprietes

$\cdot \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$\cdot \int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

chales $\cdot \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Linearite $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin x + \cos(x)}\,dx$

on pose $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin x + \cos x}\,dx$

$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x) + \sin x}\,dx$

$= \int_0^{\pi/2} 1\,dx$

$= \Big[x\Big]_0^{\pi/2} = \pi/2$

$I = J$

$2I = \pi/$

$I = J = \frac{\pi}{4}$

$I - J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}\,dx$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin(x) + \cos(x))'}{\sin(x) + \cos(x)}\,dx$

$= \Big[\ln|\sin x + \cos x|\Big]_0^{\pi/2}$

$= \ln(1) - \ln(1) = 0$

Methodes de calcul

→ **utilisation des primitive:**

- $\int k\,dx = [kx]$
- $\int x^r\,dx = \left[\frac{1}{r+1}\cdot x^{r+1}\right]$ $\quad r \neq -1$
- $\int \frac{u'}{u}\,dx = [\ln|u|]$
- $\int u' e^u\,dx = [e^u]$
- $\int u'\cdot u^r\,dx = \left[\frac{1}{r+1} u^{r+1}\right]$ on l'utilise dans les racine n^{e}
- $\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = [\operatorname{Arctan} u]$
- $\int e^{ax}\,dx = \left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]$

$$\int u'\cdot v'(u(x))\,dx = [v\circ u(x)]$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}[\sin(ax+b)]$$

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}[\cos(ax+b)]$$

$$\int \frac{u'}{u^2}\,dx = \left[-\frac{1}{u}\right]$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u}}\,dx = [2\sqrt{u}]$$

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ (La décomposition

Les classe prépa.

$$\int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\,dx$$

$$= \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{2x-1}{x(x^2+1)}$$

$$\frac{4x+5}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

$$= \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

$\int x^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) =$

→ integration par parties

$$(UV)' = U'V + V'U$$

$$\int_a^b (UV)'dx = \int_a^b U'V\,dx + \int_a^b V'U\,dx$$

$$[UV]_a^b = \underbrace{\int_a^b U'V\,dx}_{\text{non usuelle}} + \underbrace{\int_a^b V'U\,dx}_{\text{usuelle}}$$

$$\int_a^b U'V\,dx = [U.V]_a^b - \int_a^b V'U\,dx$$

① ② ③ ④ 5 →

ALPES

A → arctan; L → ln; P → pol; E → exp; S → sin et cos

$\int \frac{\sin x}{x}dx$

$\int \underset{V}{\overset{3}{P}} . \underset{U'}{\overset{4}{E}}\,dx$, $\int \underset{U'}{P} . \underset{V}{L}$; $\int \underset{U'}{P} . \underset{V}{A}$. $\int \underset{V}{E} . \underset{U'}{S}$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ variable muette

→ par changement de variable.

$$\int_a^b g'(t) \cdot f(g(t))dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

on pose $g(t) = x$

$g'(t)dt = (x)'dx$

$g'(t)dt = dx$

si $t = a \Rightarrow x = g(a)$

si $t = b \Rightarrow x = g(b)$

$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{2+t^2}dt$

F est impaire $D_F = \mathbb{R}$

$(\forall x \in D_F)\ (-x \in \mathbb{R})$

$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{2+t^2}dt$

on pose $U = -t$

$dU = -dt$

$t = -x \Leftrightarrow U = x$

$t = -2x \Rightarrow U = 2x$

$= \int_x^{2x} \frac{1}{2+U^2}(-dU) = -\int_x^{2x} \frac{1}{2+U^2}dU$

$= -F(x)$

L'intégrale et L'ordre

Soient $a,b \in I$ f continue sur I

→ si $a<b$ et $f \geq 0$ $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

→ si $a<b$ et $g \leq f \leq h$ $\Longrightarrow$

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b h(x)\,dx$$

si $a<b$

→ $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

→ Théorème de la moyenne

Si f est continue sur $[a,b]$

Alors $\exists\, c \in]a,b[$ tq

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$

$|a+b| \leq |a|+|b|$

$\left|\sum a_i\right| \leq \sum |a_i|$

$\int$: somme

S

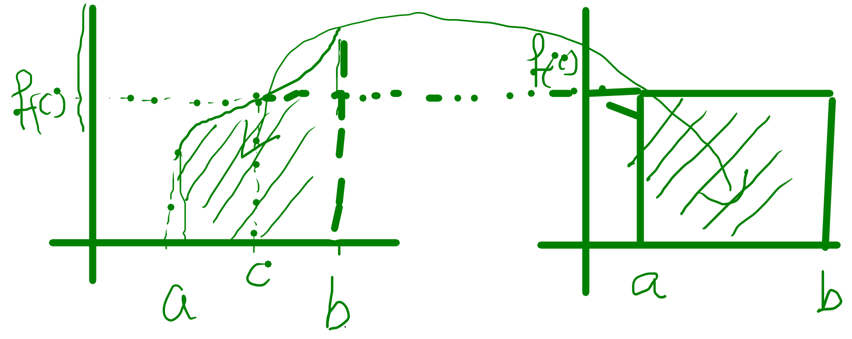
$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = f(c) = F'(c)$$

La valeur moyenne de f

sur $[a,b]$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(voir groupe L'inte)



$\int$

Somme de Riemann

$$\cdot\ U_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)$$

$$\cdot\ V_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)$$

Si f est continue sur $[a,b]$

Alors (U_n) et (V_n) sont convergente

$$\lim U_n = \lim V_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \frac{k/n}{1+(k/n)^2}$$

Mq (U_n) est C.V et Calculer $\lim U_n$

→ Le choix de la fonction

→ " " " L'intervall

on pose $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

$b - a = 1$, $a = 0$

donc $b = 1$

On a f continue sur IR

en particulier sur $[0,1]$

d'où (U_n) est C.V (Somme de Riema

$$\text{et } \lim U_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$$

$f(\frac{k}{n}) =$

Somme de Riemman.

E.N.SA

E.N.SAM

E.NAM.

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{1+(k/n)^2} = \frac{b-a}{n}\sum f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum f\left(a+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum f\left(\frac{x}{n}\right)$$

par identification $b-a=1$ et $a=0$

$b=1$

$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Exercice 4 : (3,00 points)

1. Soit f une fonction définie, continue et décroissante sur $]0;1]$.

On considère la fonction F définie sur $]0;1]$ par : $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.50 **a.** Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ et pour tout k de $\{1,\dots,n-1\}$, on a :

$$\left(\forall t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\right);\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.25 **b.** Vérifier que : $(\forall n\geq 2)$; $F\left(\frac{1}{n}\right)=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt.$

0.50 **c.** Montrer que :

$$(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(1)\leq u_n\leq F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right).$$

0.25 **d. On suppose que :** $\lim_{x\to 0^+} F(x)=\ell$ $(\ell\in\mathbb{R})$ et $\lim_{x\to 0^+} x f(x)=0.$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Soit $n\geqslant 2$ et $K\in[\![1,n-1]\!]$ $\quad f$

Soit $t\in\left[\frac{K}{n},\frac{K+1}{n}\right]$

donc $\frac{K}{n}\leqslant t\leqslant\frac{K+1}{n}$

et comme f est continue et décroissante

$$f\left(\frac{K+1}{n}\right)\leqslant f(t)\leqslant f\left(\frac{K}{n}\right)$$

et comme $\frac{K}{n}<\frac{K+1}{n}$

$$\int_{\frac{K}{n}}^{\frac{K+1}{n}} f\left(\frac{K+1}{n}\right)dt\leqslant\int_{\frac{K}{n}}^{\frac{K+1}{n}} f(t)\,dt\leqslant\int_{\frac{K}{n}}^{\frac{K+1}{n}} f\left(\frac{K}{n}\right)dt$$

$$f\left(\frac{K+1}{n}\right)\int_{\frac{K}{n}}^{\frac{K+1}{n}} 1\,dt\leqslant\int_{\frac{K}{n}}^{\frac{K+1}{n}} f(t)\,dt\leqslant f\left(\frac{K}{n}\right)\int_{\frac{K}{n}}^{\frac{K+1}{n}} 1\,dt$$

Exercice 4 : (3,00 points)

1. Soit f une fonction définie, continue et décroissante sur $]0;1]$.

On considère la fonction F définie sur $]0;1]$ par : $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.50 a. Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ et pour tout k de $\{1,\dots,n-1\}$, on a :

√ $\left(\forall t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\right);\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

0.25 √ b. Vérifier que : $(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt.$

0.50 √ c. Montrer que :

$$(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(1)\leq u_n\leq F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right).$$

0.25 **d. On suppose que :** $\lim_{x\to 0^+} F(x)=\ell\ (\ell\in\mathbb{R})$ et $\lim_{x\to 0^+} x f(x)=0.$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

$$f\left(\frac{K+1}{n}\right)\left[t\right]_{\frac{K}{n}}^{\frac{K+1}{n}}\leqslant\int_{\frac{K}{n}}^{\frac{K+1}{n}} f(t)\,dt\leqslant f\left(\frac{K}{n}\right)\left[t\right]_{\frac{K}{n}}^{\frac{K+1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{n}f\left(\frac{K+1}{n}\right)\leqslant\int_{\frac{K}{n}}^{\frac{K+1}{n}} f(t)\,dt\leqslant\frac{1}{n}f\left(\frac{K}{n}\right)$$

$$\Longrightarrow\boxed{\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n-1} f\left(\frac{K+1}{n}\right)\leqslant\sum_{K=1}^{n-1}\int_{\frac{K}{n}}^{\frac{K+1}{n}} f(t)\,dt\leqslant\frac{1}{n}\sum_{1}^{n-1} f\left(\frac{K}{n}\right)}$$

b) $\sum_{1}^{n-1}\int_{\frac{K}{n}}^{\frac{K+1}{n}} f(t)\,dt=\int_{1/n}^{\frac{2}{n}} f(t)\,dt+\int_{2/n}^{3/n} f(t)\,dt+\dots+\int_{\frac{n-1}{n}}^{1}$

$=\int_{1/n}^{1} f(t)\,dt$ (Relation de chal

$=F(1/n)$

Exercice 4 : (3,00 points)

1. Soit f une fonction définie, continue et décroissante sur $]0;1]$.

On considère la fonction F définie sur $]0;1]$ par : $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.50 **a.** Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ et pour tout k de $\{1,\dots,n-1\}$, on a :

$$\left(\forall t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\right);\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.25 **b.** Vérifier que : $(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt.$

0.50 **c.** Montrer que :

$$(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(1)\leq u_n\leq F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right).$$

0.25 **d. On suppose que :** $\lim_{x\to 0^+} F(x)=\ell\ (\ell\in\mathbb{R})$ et $\lim_{x\to 0^+} x f(x)=0.$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

c/ d'apres b et a

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$.

On a

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq F\left(\frac{1}{n}\right)\leq \frac{1}{n}\sum_{1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq F\left(\frac{1}{n}\right)\leq \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$\sum_{1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\overline{f\left(\frac{1}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n}{n}\right)}-f\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$=\sum_{1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-f(1)$$

on pose $k+1=k'$

si $k=1 \Rightarrow k'=2$

$k=n-1 \Rightarrow k'=n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{2}^{n} f\left(\frac{k'}{n}\right)\leq F\left(\frac{1}{n}\right)\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-f(1)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(\sum_{1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\leq F\left(\frac{1}{n}\right)\leq u_n-\frac{f(1)}{n}$$

$$u_n-\frac{1}{n}f(1/n)\leq F(1/n)\leq u_n-\frac{f(1)}{n}$$

Exercice 4 : (3,00 points)

1. Soit f une fonction définie, continue et décroissante sur $]0;1]$.

On considère la fonction F définie sur $]0;1]$ par : $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.50 **a.** Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ et pour tout k de $\{1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\left(\forall t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\right);\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.25 **b.** Vérifier que : $(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt.$

0.50 **c.** Montrer que :

$$(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(1)\leq u_n\leq F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right).$$

0.25 **d. On suppose que :** $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\ell\ (\ell\in\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x)=0.$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

d'in le resultat qui onvert

d

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} F\left(\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\ell$. $\left(x=\frac{1}{n}\right)$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n}f(1)=0$

de in $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{0^+} xf(x)=0$

donc : (u_n) est convergente

et $\lim u_n=\ell=$

$\ell=\lim\limits_{0^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^1 f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt=\ell$

Exercice 4 : (3,00 points)

1. Soit f une fonction définie, continue et décroissante sur $]0;1]$.

On considère la fonction F définie sur $]0;1]$ par : $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.50 a. Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ et pour tout k de $\{1,\dots,n-1\}$, on a :

$$\left(\forall t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\right);\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.25 b. Vérifier que : $(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt.$

0.50 c. Montrer que :

$$(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(1)\leq u_n\leq F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right).$$ v

0.25 **d. On suppose que :** $\lim_{x\to 0^+} F(x)=\ell\ (\ell\in\mathbb{R})$ et $\lim_{x\to 0^+} x f(x)=0.$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

(b)

soit $n\geq 2$

$F\left(\frac{1}{n}\right)=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt$

on a : $\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt$

$=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t)\,dt+\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t)\,dt+\dots+\int_{\frac{n-1}{n}}^{1} f(t)\,dt$

d'après Relation de chasle

$=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt=F\left(\frac{1}{n}\right)$

(c) Soit $k\in\{1,\dots n\}$

donc $1\leq k\leq n$

$\frac{1}{n}\leq\frac{k}{n}\leq 1$

comme f est décroissant sur $]0,1]$

$f(1)\leq f\left(\frac{k}{n}\right)\leq f\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n} f(1)\leq\sum_{1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\leq\sum_{1}^{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow f(1)\sum_{1}^{n} 1\leq n u_n\leq f\left(\frac{1}{n}\right)\sum 1$

$n f(1)\leq n u_n\leq n f\left(\frac{1}{n}\right)$

$f(1)\leq u_n\leq f\left(\frac{k}{n}\right)$

Σ	**Examen Nationale Blanc N° 2 Baccalauréat 2021** **Science mathématiques (A) et (B) Ville ZAIO**	E8_21	Page 4 / 6

Exercice 4 : (3,00 points)

1. Soit f une fonction définie, continue et décroissante sur $]0;1]$.

On considère la fonction F définie sur $]0;1]$ par : $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.50 **a.** Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ et pour tout k de $\{1,\dots,n-1\}$, on a :

$$\left(\forall t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\right);\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.25 **b.** Vérifier que : $(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt.$

0.50 **c.** Montrer que :

$$(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(1)\leq u_n\leq F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right).$$

0.25 **d. On suppose que :** $\lim_{x\to 0^+} F(x)=\ell$ $(\ell\in\mathbb{R})$ et $\lim_{x\to 0^+} x f(x)=0.$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

c on a $\forall n\geq 2$

$$F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(1)\leq u_n\leq F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\lim_{n\to+\infty} F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(1) =$

on pose $x=\frac{1}{n}$ q-d $n\to+\infty$ $x\to 0^+$

et $\lim_{+\infty} \frac{1}{n}F\left(\frac{1}{n}\right)$ $=\lim_{x\to 0^+} xF(x)=0$

$\lim_{n\to+\infty} F\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{x\to 0^+} F(x)=\ell$

d'après Thm Gendarm
donc (u_n) est c.v et
$\lim u_n=\ell$

Exercice 4 : (3,00 points)

1. Soit f une fonction définie, continue et décroissante sur $]0;1]$.

On considère la fonction F définie sur $]0;1]$ par : $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.50 **a.** Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ et pour tout k de $\{1,\dots,n-1\}$, on a :

$$\left(\forall t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\right);\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.25 **b.** Vérifier que : $(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt.$

0.50 **c.** Montrer que :

$$(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(1)\leq u_n\leq F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right).$$

0.25 **d. On suppose que :** $\lim_{x\to 0^+} F(x)=\ell\ (\ell\in\mathbb{R})$ et $\lim_{x\to 0^+} x f(x)=0.$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

1/ a)

soit $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ et $k\in\{1,\dots n-1\}$

$\forall\ t\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]\subset[0,1]$

$\Rightarrow \frac{k}{n}\leq t\leq\frac{k+1}{n}$

et comme f est continue

et str $\downarrow$

$\Rightarrow f(\frac{k+1}{n})\leq f(t)\leq f(\frac{k}{n})$

et puisque $\frac{k}{n}<\frac{k+1}{n}$

$\Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\frac{k+1}{n})\,dt\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\frac{k}{n})\,dt$

$\Leftrightarrow f(\frac{k+1}{n})\left[t\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq f(\frac{k}{n})\left[t\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}$

$\Leftrightarrow f(\frac{k+1}{n})(\frac{1}{n})\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k+1}{n})\leq\sum\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} f(\frac{k}{n})$

0.25 **d. On suppose que :** $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)=\ell$ $(\ell\in\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x f(x)=0$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. Dans cette question, on suppose que f une fonction continue et croissante sur $[0,\pi]$.

0.50 a. Montrer que pour tout entier $n\geq1$ et pour tout k de $\{0,1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)|\,dx=\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}(-1)^k\sin(nx)\,dx=\frac{2}{n}.$$

0.50 b. Montrer que pour tout entier $n\geq1$ et pour tout k de $\{0,1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\frac{2}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\leq\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\,dx\leq\frac{2}{n}f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

0.25 c. En déduire un encadrement de $\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,dx$.

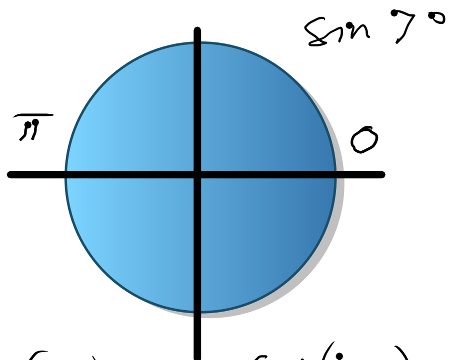
0.25 d. Déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

2°/ f continue et $\nearrow$ sur $[0,\pi]$

soit $n\geq1$ et $k\in[\![0,n-1]\!]$

et soit $\frac{k\pi}{n}\leq x\leq\frac{(k+1)\pi}{n}$

$k\pi\leq nx\leq(k+1)\pi$



• si k est pair donc $\sin(nx)\geq0$

donc $|\sin nx|=\sin(nx)$

$=(-1)^k\sin(nx)$

$\cos(k\pi)=(-1)^k$

• si k impair Alors $\sin(nx)\leq0$

donc $|\sin(nx)|=-\sin(nx)$

$=(-1)^k\sin(nx)$

$\cos(2k\pi)=1$

$\cos((2k+1)\pi)=-1$

d'où $\displaystyle\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}|\sin(nx)|\,dx=\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}(-1)^k\sin(nx)\,dx$

$=(-1)^k\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}$

$=-\frac{1}{n}(-1)^k\left(\cos((k+1)\pi)-\cos(k\pi)\right)=2/n$

$=(-1/n)(-1)^k\left((-1)^{k+1}-(-1)^k\right)=2/n$.

vérifier

0.25 d. **On suppose que :** $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\ell \ (\ell\in\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x f(x)=0$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. Dans cette question, on suppose que f une fonction continue et croissante sur $[0,\pi]$.

0.50 a. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout k de $\{0,1,\dots,n-1\}$, on a :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)|\,dx=\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} (-1)^k\sin(nx)\,dx=\frac{2}{n}.$$

0.50 b. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout k de $\{0,1,\dots,n-1\}$, on a :

$$\frac{2}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\leq\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\,dx\leq\frac{2}{n}f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

0.25 c. En déduire un encadrement de $\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,dx$.

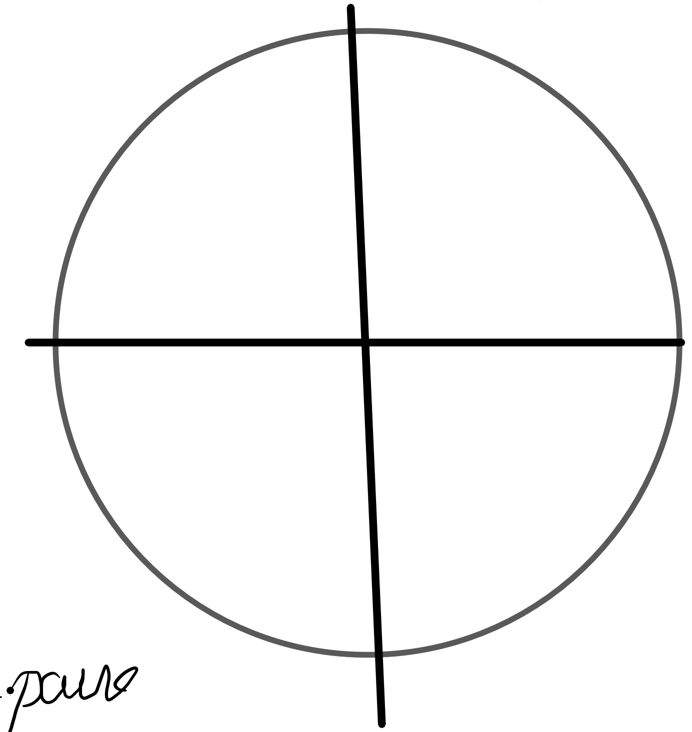
0.25 Déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

2 Soit $\frac{k\pi}{n}\leq x\leq\frac{k+1}{n}\pi$

$\iff k\pi\leq nx\leq(k+1)\pi$

si K paire donc $\sin(nx)\geq 0$

donc $|\sin(nx)|$
$=\sin(nx)$
$=(-1)^k\sin(nx)$



la meme chose si K est impaire

0.25 **d. On suppose que :** $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = \ell \ (\ell \in \mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x f(x) = 0$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. Dans cette question, on suppose que f une fonction continue et croissante sur $[0;\pi]$.

0.50 a. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout k de $\{0,1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)|\, dx = \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} (-1)^k \sin(nx)\, dx = \frac{2}{n}.$$

0.50 b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout k de $\{0,1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\frac{2}{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\, dx \leq \frac{2}{n} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

0.25 c. En déduire un encadrement de $\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\, dx$.

0.25 Déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx$.

donc $\displaystyle\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{k+1}{n}\pi} |\sin(nx)|\, dx$

$\displaystyle = \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{k+1}{n}\pi} (-1)^k \sin(nx)\, dx$

$\displaystyle = (-1)^k \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{k+1}{n}\pi}$

$\displaystyle = \frac{(-1)^{k+1}}{n} \left(\cos(k+1)\pi - \cos(k\pi) \right)$

$= 2/n$.

0.25 **d. On suppose que :** $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)=\ell$ $(\ell\in\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x f(x)=0$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. Dans cette question, on suppose que f une fonction continue et croissante sur $[0,\pi]$.

0.50 a. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout k de $\{0,1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)|\,dx=\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} (-1)^k\sin(nx)\,dx=\frac{2}{n}.$$

0.50 b. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout k de $\{0,1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\frac{2}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\leq\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\,dx\leq\frac{2}{n}f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

0.25 c. En déduire un encadrement de $\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,dx$.

0.25 Déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

Soit $n\geq 1$ et $K\in[\![0,n-1]\!]$

soit $\frac{K\pi}{n}\leq x\leq\frac{K+1}{n}\pi$

et comme f continue et str $\nearrow$

$\iff f\left(\frac{K\pi}{n}\right)\leq f(x)\leq f\left(\frac{K+1}{n}\pi\right)$

$\iff |\sin(nx)|\,f\left(\frac{K\pi}{n}\right)\leq|\sin(nx)|\,f(x)\leq|\sin nx|\,f\left(\frac{(K+1)\pi}{n}\right)$

et comme $\frac{K\pi}{n}<\frac{K+1}{n}\pi$

$\Longrightarrow f\left(\frac{K\pi}{n}\right)\underbrace{\int_{\frac{K\pi}{n}}^{\frac{K+1}{n}\pi}|\sin(nx)|\,dx}_{2/n}\leq\int_{\frac{K\pi}{n}}^{\frac{K+1}{n}\pi}f(x)|\sin nx|\,dx\leq f\left(\frac{K+1}{n}\pi\right)\underbrace{\int_{\frac{K\pi}{n}}^{\frac{K+1}{n}\pi}|\sin(nx)|\,dx}_{2/n}$

$\iff$ d'où le résultat.

$f\leq g\Rightarrow\int f\leq\int g$

$\int f\leq\int g\not\Rightarrow f\leq g$

0.25 **d. On suppose que :** $\lim_{x\to 0^+} F(x)=\ell\ (\ell\in\mathbb{R})$ et $\lim_{x\to 0^+} x f(x)=0$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. Dans cette question, on suppose que f une fonction continue et croissante sur $[0,\pi]$.

0.50 a. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout k de $\{0,1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)|\,dx=\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} (-1)^k\sin(nx)\,dx=\frac{2}{n}.$$

0.50 b. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout k de $\{0,1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\frac{2}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\leq\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\,dx\leq\frac{2}{n}f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

0.25 c. En déduire un encadrement de $\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,dx$.

0.25 Déduire que : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

c) on a : d'après b

$$\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\leq\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{k+1}{n}\pi} f(x)|\sin(nx)|\,dx}_{\text{Chales.}}\leq\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\pi\right)$$

$$\frac{2}{n}\sum_{0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\leq\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|\,dx\leq\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\pi\right)$$

$$\lim\frac{2}{n}\sum_{0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\cdot\pi\right)=\frac{2}{\pi}\lim\frac{\pi-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\pi\cdot\frac{k}{n}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$ (somme de r...

$$\lim\frac{2}{n}\sum_{1}^{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

Problème (20 points)

Partie I

Soit $x \in]0;+\infty[$; on pose $I(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^t dt$

1pt 1) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $0 \le I(x) \le \frac{x^3}{6} e^x$.

1,5pt 2) En utilisant la méthode d'intégration par partie deux fois montrer que :

$$I(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \quad .$$

0,5pt 3) En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

a) Soit $x > 0$ on a $0 < t < x$

donc $1 \leq e^t \leq e^x$

$\Rightarrow 0 \leq (x-t)^2 e^t \leq (x-t)^2 e^x$

et comme $0 < x$

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^t dt \leq \frac{e^x}{2} \int_0^x (x-t)^2 dt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I(x) \leq -\frac{e^x}{2} \left[\frac{(x-t)^3}{3} \right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I(x) \leq \frac{x^3}{6} e^x$$

2) $I(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 e^t dt$

on pose $V_1(t) = (x-t)^2$ donc $V_1' = -2(x-t)$

$U_1'(t) = e^t \quad \Leftrightarrow \quad U_1(t) = e^t$

d'après I.P.P.

$$I(x) = \frac{1}{2} \left(\left[e^t (x-t)^2 \right]_0^x + 2 \underbrace{\int_0^x (x-t) e^t}_{J} \right.$$

on pose $V_2(t) = x - t \quad \Leftrightarrow \quad V_2'(t) = -1$

$U_2'(t) = e^t \quad \Leftrightarrow \quad U_2(t) = e^t$

$J = [(x-t)e^t] + \int e^t$

$I(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ (à vérifier)

ALPES

1 2 3 4 5

ALPES

Ar ln

Problème (20 points)

Partie I

Soit $x \in]0;+\infty[$; on pose $I(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^t dt$

1pt 1) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $0 \leq I(x) \leq \frac{x^3}{6} e^x$.

1,5pt 2) En utilisant la méthode d'intégration par partie deux fois montrer que :

$$I(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \quad .$$

0,5pt 3) En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Soit $x > 0$ on a $0 \leq I(x) \leq \frac{x^3}{6} \cdot e^x$

$\Leftrightarrow 0 \leq e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{6} e^x$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^3}{6} e^x + \frac{x^2}{2}$

$\Leftrightarrow \overset{\nearrow 1/2}{\frac{1}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \overset{\nearrow 1/2}{\frac{x}{6} e^x + \frac{1}{2}}$

donc $\lim\limits_{0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Problème (20 points)

Partie I

Soit $x \in]0;+\infty[$; on pose $I(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^t dt$

1pt 1) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $0 \leq I(x) \leq \frac{x^3}{6} e^x$.

1,5pt 2) En utilisant la méthode d'intégration par partie deux fois montrer que :

$$I(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \quad .$$

0,5pt 3) En déduire que : $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

التمرين (1) ليكن n عددا من $\mathbb{N}$

1) بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}:\ \sin^{2n+1}x=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k(-1)^k\sin x\cos^{2k}x$

2) أحسب $I_k=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin t\cos^{2k}t\,dt$ $(\forall k\in\mathbb{N})$

3) استنتج التكامل: $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin^{2n+1}t\,dt$

$$(a+b)^n=\sum_0^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

1°/ Soit $x\in\mathbb{R}$

$$\sin^{2n+1}(x)=\sin(x)\cdot\left(\sin^2(x)\right)^n$$
$$=\sin(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^n$$
$$=\sin(x)\sum_0^n C_n^k\left(-\cos^2(x)\right)^k\cdot 1^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k\sin(x)\cdot\left(\cos^{2k}(x)\right)$$

2°/ $$I_k=\int_{\pi/2}^{x}\sin(t)\cdot\cos^{2k}(t)\,dt$$
$$=-\int_{\pi/2}^{x}(\cos(t))'\cdot\cos^{2k}(t)\,dt$$
$$=-\left[\frac{1}{2k+1}\cos^{2k+1}(t)\right]_{\pi/2}^{x}$$
$$=\frac{-1}{2k+1}\cos^{2k+1}(x)-0$$

التمرين (1) ليكن n عددا من $\mathbb{N}$

1) بين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \sin^{2n+1} x = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^k \sin x \cos^{2k} x$

2) أحسب $I_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t \cos^{2k} t \, dt \quad (\forall k \in \mathbb{N})$

3) استنتج التكامل: $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1} t \, dt$

$I_r = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} s_{i,}$

التمرين (1) ليكن n عددا من $\mathbb{N}$

1) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad \sin^{2n+1} x = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^k \sin x \cos^{2k} x$

2) أحسب $(\forall k \in \mathbb{N}) \quad I_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t \cos^{2k} t \ dt$

3) استنتج التكامل : $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1} t \ dt$

التمرين (1) ليكن n عددا من $\mathbb{N}$

1) بين أن : $\sin^{2n+1} x = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^k \sin x \cos^{2k} x \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) أحسب $I_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t \cos^{2k} t \, dt \quad (\forall k \in \mathbb{N})$

3) استنتج التكامل : $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1} t \, dt$

www..ift.fr

التمرين الثاني :

لكل عدد طبيعي n

نعتبر التكاملات التالية : $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \; dt$ و $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \; dt$

1) أحسب $a_0 \; ; \; b_0$

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

3) أ- بين أن $t \leq \frac{\pi}{2} \sin t \quad \left(\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

ب- استنتج أن $0 < b_n \leq \frac{\pi^2}{4}\left(a_{2n} - a_{2n+2}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج- بين أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \; \cos^{2n+1} t \; dt$$

التمرين الثاني :

لكل عدد طبيعي n

نعتبر التكاملات التالية : $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \ dt$ و $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \ dt$

1) أحسب $a_0 \ ; \ b_0$

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

3) أ- بين أن $t \leq \frac{\pi}{2} \sin t \quad \left(\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

ب- استنتج أن $0 < b_n \leq \frac{\pi^2}{4}\left(a_{2n} - a_{2n+2}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج- بين أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \ \cos^{2n+1} t \ dt$$

التمرين الثاني :

لكل عدد طبيعي n

نعتبر التكاملات التالية : $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \; dt$ و $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \; dt$

1) أحسب a_0 ; b_0

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

3) أ- بين أن $t \le \frac{\pi}{2} \sin t \quad \left(\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

ب- استنتج أن $0 < b_n \le \frac{\pi^2}{4}\left(a_{2n} - a_{2n+2}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج- بين أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{2n+2} = (2n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, \cos^{2n+1} t \; dt$$

التمرين الثاني :

لكل عدد طبيعي n

نعتبر التكاملات التالية : $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \; dt$ و $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \; dt$

1) أحسب a_0 ; b_O

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

3) أ- بين أن $t \leq \frac{\pi}{2} \sin t \quad \left(\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

ب- استنتج أن $0 < b_n \leq \frac{\pi^2}{4}\left(a_{2n} - a_{2n+2}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج- بين أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \; \cos^{2n+1} t \; dt$$

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, \cos^{2n+1} t \, dt$$

ب- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}$

ج- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2\left(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$

5) أ- بين أن المتالية $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ متقاربة و أن نهايتها هي $\frac{\pi^2}{6}$

ب- استنتج أن $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \, dt$$

ب- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}$

ج- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2\left(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$

5) أ- بين أن المتالية $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ متقاربة و أن نهايتها هي $\frac{\pi^2}{6}$

ب- استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, \cos^{2n+1} t \, dt$$

ب- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \dfrac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}$

ج- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2\left(\dfrac{b_n}{a_{2n}} - \dfrac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

5) أ- بين أن المتتالية $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k^2}$ متقاربة و أن نهايتها هي $\dfrac{\pi^2}{6}$

ب- استنتج أن $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \, dt$$

ب- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \dfrac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}$

ج- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2\left(\dfrac{b_n}{a_{2n}} - \dfrac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

5) أ- بين أن المتالية $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ متقاربة و أن نهايتها هي $\dfrac{\pi^2}{6}$

ب- استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \, dt$$

ب- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \dfrac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}$

ج- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2\left(\dfrac{b_n}{a_{2n}} - \dfrac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

5) أ- بين أن المتالية $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k^2}$ متقاربة و أن نهايتها هي $\dfrac{\pi^2}{6}$

ب- استنتج أن $\dfrac{\pi^2}{8} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$

التمرين الثاني :

لكل عدد طبيعي n

نعتبر التكاملات التالية : $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \; dt$ و $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \; dt$

1) أحسب $a_0 \; ; \; b_0$

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

3) أ- بين أن $t \leq \frac{\pi}{2} \sin t \quad \left(\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right)$

ب- استنتج أن $0 < b_n \leq \frac{\pi^2}{4}\left(a_{2n} - a_{2n+2}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج- بين أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{2n+2} = (2n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \; \cos^{2n+1} t \; dt$$