Exercice 4 : (3,00 points)

1. Soit f une fonction définie, continue et décroissante sur $]0;1]$.

On considère la fonction F définie sur $]0;1]$ par : $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.50 **a.** Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ et pour tout k de $\{1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\left(\forall t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\right);\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.25 **b.** Vérifier que : $(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt.$

0.50 **c.** Montrer que :

$$(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(1)\leq u_n\leq F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right).$$

0.25 **d. On suppose que :** $\lim_{x\to 0^+} F(x)=\ell\ (\ell\in\mathbb{R})$ et $\lim_{x\to 0^+} x f(x)=0.$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. Dans cette question, on suppose que f une fonction continue et croissante sur $[0;\pi]$.

0.50 **a.** Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout k de $\{0,1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}|\sin(nx)|\,dx=\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}(-1)^k\sin(nx)\,dx=\frac{2}{n}.$$

0.50 **b.** Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout k de $\{0,1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\frac{2}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\leq\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\,dx\leq\frac{2}{n}f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

0.25 **c.** En déduire un encadrement de $\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,dx.$

0.25 Déduire que : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx.$

19:37 4G+ 77%

0.50 **4. a.** Montrer que la suite $(y_n)_{n\geq 3}$ converge et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 1$.

0.50 **b.** Montrer que : $(\forall n \geq 3)(\exists c_n \in]y_n, 1[);\ \dfrac{y_n - 1}{\ln(y_n)} = c_n$.

0.25 **c.** En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(y_n - 1) = -1$.

Exercice 4 : (5,75 points)

On considère la fonction numérique F définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$F(1) = -\ln 2 \text{ et } (\forall x > 1);\ F(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{\ln^2(t)}\, dt$$

et soit (C_F) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par :

$$h(1) = 1 \text{ et } (\forall x \in]1,+\infty[);\ h(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

0.25 **a.** Montrer que la fonction h est continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

0.25 **b.** Vérifier que pour tout x de $]1,+\infty[$ on a : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\, dt = \ln 2$.

Prof : Abdelali TAJJIOU ©2021 Prof : Soufiane TAJJIOU

CS Scanné avec CamScanner

0. **c.** En utilisant la technique de l'intégration par partie, montrer que :

$$(\forall x \in]1,+\infty[);\ F(x) - F(1) = \frac{x(x-1)(x+2)}{2} h(x) - \int_x^{x^2} \frac{2t+1}{t} h(t)\, dt$$

0.50 **d.** Déduire que F est continue à droite en 1.

0.75 **2. a.** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$, puis calculer la dérivé premier F' de la fonction F.

0.75 **b.** En utilisant **le théorème des accroissements finis deux fois** montrer que :

$$(\forall x \in]1,+\infty[)\left(\exists(\alpha;\beta) \in (]1,x[)^2\right)(\alpha > \beta);\ F(x) - F(1) = \frac{(1-x)(\alpha+2)}{2}\beta^2$$

0.50 **c.** Montrer que la fonction F est dérivable à droite en 1 et calculer $F'_d(1)$.

0.25 **3. a.** Montrer que : $(\forall x \in]1,+\infty[)\left(\exists c_x \in [x, x^2]\right);\ F(x) = (x - x^2)\dfrac{c_x - 1}{\ln^2(c_x)}$.

0.50 **b.** En déduire que : $(\forall x \in]1,+\infty[);\ F(x) \leq -x\left(\dfrac{h(x)}{2}\right)^2$.

0.75 **c.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

0.25 **4. a.** Donner le tableau de variations de F.

0.25 **b.** Tracer la courbe (C_F). (On prend : $\|\vec{i}\| = 1\ cm$).