Problème : 3

Partie : I

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -e^{-x+1}(x+1-e^x)$

$(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ $\left(||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1cm\right)$

1. a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ $\quad \dfrac{f(x)}{x} = -e^{-x+1} + \dfrac{e^x-1}{x} \times e^{1-x}$
   b. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
2. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\quad f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right)(-x+1)e^{-x+1} + e$
   b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$, et donner une interprétation géométrique de ce résultat.
3. a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
   b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis déduire que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$
4. a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\quad f'(x) = xe^{-x+1}$
   b. En déduire que : f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et qu'elle est strictement croissante sur $[0, +\infty[$
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f
5. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\quad f''(x) = (1-x)\,e^{-x+1}$
   b. Étudier le signe de $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   c. En déduire que le point $A(1, e-2)$ est un unique point d'inflexion de $C(C_f)$, puis étudier la convexité de (C_f)
6. Tracer les courbes (C_f) dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$

Partie : II Prof : TADOUMMANT

Soit la fonction g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$ et par le tableau de variations ce-dessous :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

1. a. Calculer $g(0)$, puis étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est en dessous de $(\mathscr{C}_f)$ sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, et au-dessus de $(\mathscr{C}_f)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$
2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   a. Montrer par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 1$
   b. Démontrer que (u_n) est décroissante
   c. En déduire que (u_n) est convergente, puis calculer sa limite