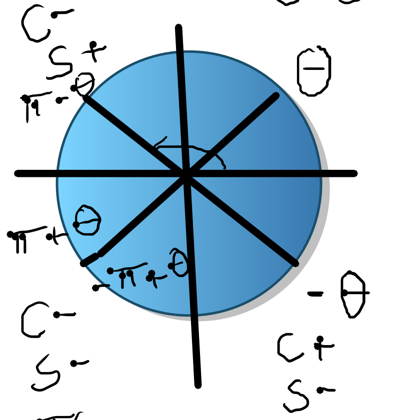
$$\begin{cases} a+ib = re^{i\theta} \\ a-ib = re^{-i\theta} \\ -a+ib = re^{i(\pi-\theta)} \\ -a-ib = re^{i(\pi+\theta)} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{\sqrt3}{2} + i\frac{1}{2} = 1e^{i\pi/6} \\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt3}{2} = e^{i\pi/3} \\ \frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$

usuelle

→ $1+e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\underbrace{(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2})}$

$= 2\cos(\theta/2)\cdot e^{i\theta/2}$

→ $1-e^{i\theta} = 1+e^{i(\theta+\pi)}$

$= e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})}\left(2\cos\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)\right)$

Le cas général

$$e^{i\theta}+e^{i\theta'} = e^{i(\frac{\theta+\theta'}{2})}\underbrace{2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}$$

Exemple

$Z = \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt3+2}{2}\right)$

$= \underbrace{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt3}{2}} + i$

$= e^{i\pi/3} + e^{i\pi/2}$

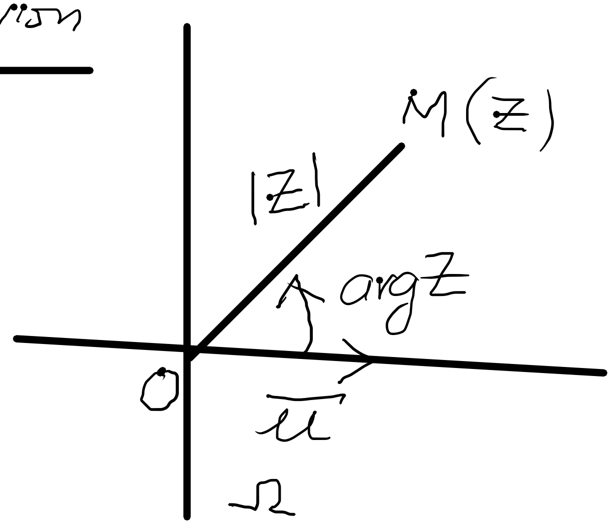
$= e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}\right)}\, 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}\right)$

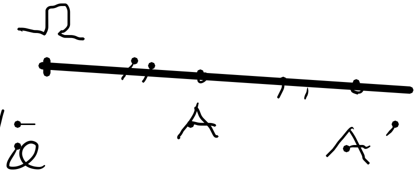
$= e^{i\frac{5\pi}{12}}\, 2\cos\frac{\pi}{12}$

Arg Les m̂ propriété de Ln

$\text{Arg}\, Z \equiv (\vec{u}, \vec{OM})\ [2\pi]$

Transformation





→ $h(\Omega, \underset{\in\mathbb{R}}{k})$ homothétie

$h(M) = M' \iff \vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M}$

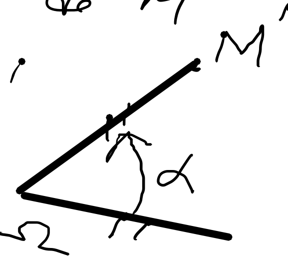
$\iff Z' - Z_\Omega = k(Z - Z_\Omega)$

L'affixe de l'image M'

L'affixe de M

→ $R(\Omega, \alpha)$

$$R(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \alpha\ [2\pi] \end{cases}$$



$\Omega M = \Omega M'$

$\Longleftrightarrow |Z - Z_\Omega| = |Z' - Z_\Omega|$ (1)

$\overline{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} \equiv \alpha\ [2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{Z' - Z_\Omega}{Z - Z_\Omega}\right) \equiv \alpha\ [2\pi]$

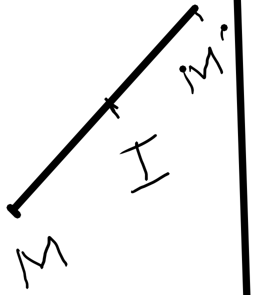
$\left|\dfrac{Z' - Z_\Omega}{Z - Z_\Omega}\right| = 1$

donc :

$\dfrac{Z' - Z_\Omega}{Z - Z_\Omega} = 1 e^{i\alpha}$

$\Longleftrightarrow (Z' - Z_\Omega) = e^{i\alpha}(Z - Z_\Omega)$

$S_I(M) = M'$



$\Longleftrightarrow$ I milieu de $[MM']$

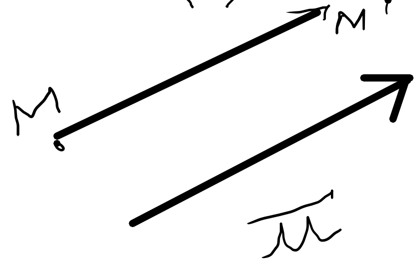
$\Longleftrightarrow \dfrac{Z' + Z}{2} = Z_I$

$\Longleftrightarrow Z' = 2Z_I - Z$

$Z' = aZ + b$

- $a \in \mathbb{R}$
  - $a = 1 \Downarrow$ Line Translat
  - $a \neq 1 \Downarrow$ homothétie
- $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
  - $|a| = 1 \Downarrow$ rotation
  - $|a| \neq 1 \Downarrow$ $Roh = hoR$

$t_{\vec{u}}(M) = M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$



$\Longleftrightarrow Z' - Z = Z_{\vec{u}}$

$\Longleftrightarrow Z' = Z + Z_{\vec{u}}$

$Roh =$

$g \circ f \neq f \circ g$

$h(M) = M$

$R(M) = M$ $\Longleftrightarrow \Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$

$Z' = \dfrac{i}{\overline{Z}}$

$M(Z) \longrightarrow M'(Z')$

$Z \longrightarrow Z' = \dfrac{i}{\overline{Z}}$

L'ensemble des points

Droite - cercle

~~elipse - hyperbol~~

ou

Δ l'ensemble des point $M(m)$

on pose $m = x + iy$

$ax + by + c = 0$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$|Z - 2i| = |\overline{Z} - i|$

$|Z - 2i| = |\overline{\overline{Z} - i}|$

$|Z - 2i| = |Z + i|$

géométrique

on pose $Z_A = 2i$ et $Z_B = -i$

$M(Z)$

$AM = BM$

C'est la mediatrice du segment $[AB]$

on pose $Z = x + iy$

$|x + iy - 2i|^2 = |x - iy - i|^2$

$x^2 + (y - 2)^2 = x^2 + (y + 1)^2$

$(y - 2)^2 = (y + 1)^2$

$\cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{y^2} + 2y + 1$

$|Z| = |\overline{Z}|$

$|Z| = \sqrt{Z \cdot \overline{Z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$-6y + 3 = 0$

$\rightarrow |Z - 2i| = 3$

$AM = 3$

C'est le cercle de centre A et de rayon $R = 3$

Analytiquement

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

on pose $Z = x + iy$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$|x + iy - 2i|^2 = 3^2$

$x^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

C'est le cercle de centre $A(2i)$ et de rayon $R = 3$

Exercice Numéro 2 : (03,50 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 Soit : (E) : $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$; $z \in \mathbb{C}$.

0,50 **a** Vérifier que $a = 1 + i(2-\sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E).

0,50 **b** En déduire b la deuxième solution de l'équation (E).

0,50 **2** **a** Montrer que : $a^2 = 4(2-\sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{6}}$.

0,50 **b** Écrire a sous la forme exponentielle ou trigonométrique.

3 Soient : $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$; $c = 2i + 2e^{\frac{i\pi}{7}}$.

a/ $a = 1 + i(2-\sqrt{3})$ on remplace z par a.

b/ Rappel z_1 et z_2 sol de l'equation

$az^2 + bz + c = 0$

$\Longrightarrow z_1 + z_2 = -b/a$ et $z_1 . z_2 = c/a$

On a $a + b = 4i \Longrightarrow b = 4i - 1 - 2i + i\sqrt{3}$

$b = -1 + i(2+\sqrt{3})$

2/ a) $a^2 = (1 + i(2-\sqrt{3}))^2$

$= 1 - (2-\sqrt{3})^2 + 2i(2-\sqrt{3})$

$= 1 - 4 + 4\sqrt{3} - 3 + 2i(2-\sqrt{3})$

$= -6 + 4\sqrt{3} + 2i(2-\sqrt{3})$ (1)

d'autre par

$4(2-\sqrt{3})e^{i\pi/6} = 4(2-\sqrt{3})(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$= 4(2-\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

$= 2(2-\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$

$= -6 + 4\sqrt{3} + 2i(2-\sqrt{3})$ (2)

(1) et (2) $\Longrightarrow a^2 = 4(2-\sqrt{3})e^{i\pi/6}$

$3,5pt \longrightarrow x$

$20pts \longrightarrow 240min$

$x = \frac{240 \times 3,5}{20} = 42 min$

2h Analyse

→ structure 3,5

→ Arithmétique 3

– complexe 3,5

– Analyse.

10pts

■ Exercice Numéro 2 : (03,50 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1 Soit : (E) : $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$; $z \in \mathbb{C}$.

0,50 **a** Vérifier que $a = 1 + i(2-\sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E).

0,50 **b** En déduire b la deuxième solution de l'équation (E).

0,50 **2** **a** Montrer que : $a^2 = 4(2-\sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{6}}$.

0,50 **b** Écrire a sous la forme exponentielle ou trigonométrique.

3 Soient : $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$; $c = 2i + 2e^{\frac{i\pi}{7}}$.

$1 + j + j^2 = 0$, $j^3 = 1$ $Z^3 = 1 \iff$ jacobien

$$Z^n = re^{i\theta} \iff Z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

$k \in \{0, \dots, n-1\}$

racine $n^{ième}$

$\frac{13\pi}{12} - 2\pi$

$\frac{13\pi}{12} - 2\pi$

$$Z_K^n = re^{i(\theta+2k\pi)}$$

$$\implies \sqrt[n]{Z_K^n} = \sqrt[n]{re^{i(\theta+2k\pi)}}$$

$$Z_K = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

$1, j, j^2$

$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$a^2 = 4(2-\sqrt{3})e^{i\pi/6}$$

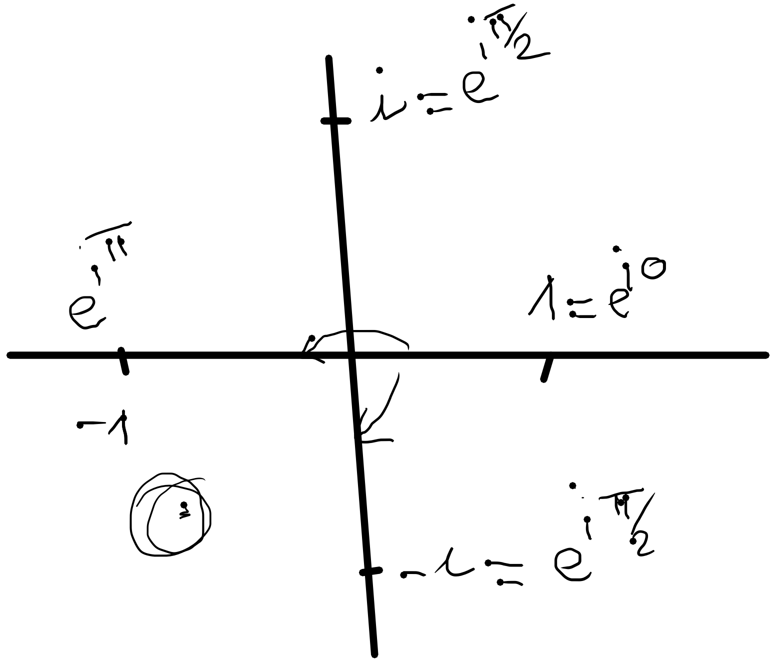
$$a = \sqrt{4(2-\sqrt{3})}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\pi\right)}$$

$k = 0$ ou $k = 1$

$$a = 2\sqrt{(2-\sqrt{3})}\, e^{i\pi/12} \quad (1)$$

ou

$$a = 2\sqrt{(2-\sqrt{3})}\, e^{i\frac{13\pi}{12}} \quad (2)$$



Exemple Déterminer les racines $5^{ème}$ de (-1)

$$Z^5 = -1 = e^{i\pi} \iff Z_K = \sqrt[5]{1} \cdot e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)}$$

$K \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$Z_0 = e^{i\pi/5}$,

$Z_1 = e^{i3\pi/5}$,

Rq : $\sum_{0}^{4} Z_K = 0$, $Z^5 = -1$

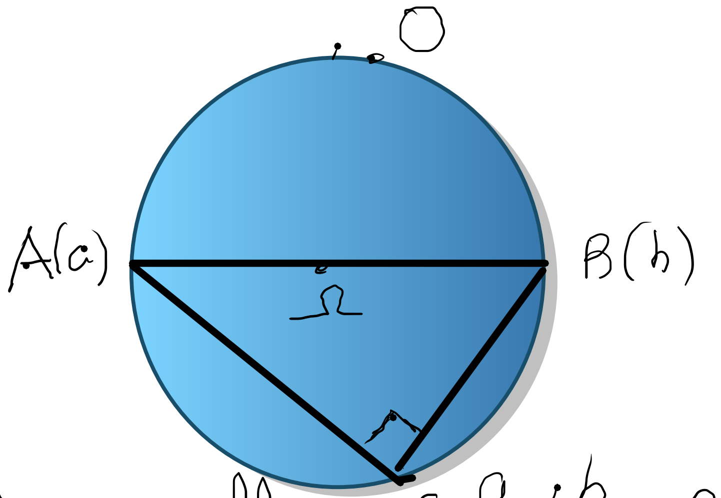
Soit (Γ) le cercle de centre Ω et $[AB]$ est l'un de ces diamètres.

0,50 **a** Déterminer $\omega = aff(\Omega)$.

0,50 **b** Montrer que : $O \in (\Gamma)$ et $C \in (\Gamma)$.

0,50 **c** Montrer que : $\left(\frac{c-a}{c-b}\right) \in i\mathbb{R}$

$A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ $\quad c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$



(a) $\omega = aff\,\Omega = \frac{a+b}{2} = 2i$

d'où $\Omega(2i)$

(b) $O \in (\Gamma)$ $\quad O\Omega = |\omega - 0|$

$= |2i| = 2$

$\frac{AB}{2} = \frac{|b-a|}{2}$

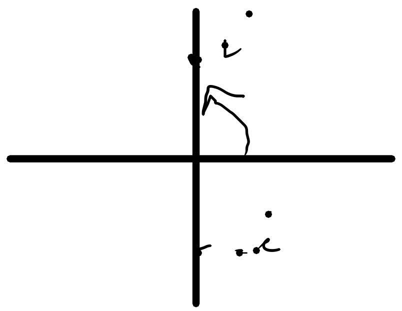
$= \frac{|-1+i(2+\sqrt{3}) - 1 - i(2-\sqrt{3})|}{2}$

$= \frac{|-2 + 2i\sqrt{3}|}{2}$

$= 2$

d'où $O\Omega = \frac{AB}{2}$

$\bar{Z} = -Z$



D'où $O \in (\Gamma)$

$\Omega C = |c - \omega|$

$= |2i + 2e^{i\pi/7} - 2i|$

$= |2e^{i\pi/7}| = 2$

d'où $\Omega C = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow C \in (\Gamma)$

c) on a $C \in (\Gamma)$

et puisque $[AB]$ est un diamètre alors

$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

$\arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{c-a}{c-b} \in i\mathbb{R}$

$\leqslant 38min$

$\leqslant 45min$

■ **Exercice Numéro 3 : (03,50 points)** $m \in \mathbb{C}$

I Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit : (E_m) : $z^2+\underbrace{[(1-i)m-4]}z\overbrace{-im^2-2(1-i)m+4}=0$; $m,z \in \mathbb{C}$

0,50 **1** Vérifier que $z_1=2-m$ est une solution de l'équation (E_m). et détermine z_2

0,50 **2 a** Montrer l'équivalence : $z_1z_2=1 \Leftrightarrow im^2+2(1-i)m-3=0$.

1,00 **b** Déterminer les valeurs de m pour lesquelles on ait : $z_1z_2=1$.

II On considère l'application S et la rotation $\mathcal{R}$ définies ainsi :

$$S : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P}) \qquad \mathcal{R}\left(\Omega,\frac{\pi}{2}\right) : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P})$$
$$M(z) \mapsto M'(z') \qquad M(z) \mapsto M''(z'')$$

Avec : $z'=-(z-1)+1$; $aff(\Omega)=1+i$; $aff(E)=1$.

1° a on remplace z par $z_1=(2-m)$ (calcul)

$z_1+z_2=-\frac{b}{a}=-(1-i)m+4$

$z_2=-m+im+4-2+\cancel{m}$

$\boxed{z_2=im+2}$

2/ a $z_1.z_2=\frac{c}{a}=1 \Leftrightarrow \overbrace{-im^2-2(1-i)m+4}^{c/a}=1$

$\Leftrightarrow im^2+2(1-i)m-3=0$

$z_1+z_2=\frac{-b}{a}$

$z_1.z_2=\frac{c}{a}$

b) $z_1.z_2=1 \Leftrightarrow im^2+2(1-i)m-3=0$

$\Delta=4(1-i)^2+12i$

$=4(-2i)+12i$

$=-8i+12i$

$=4i=2(2i)$

$=2(1+i)^2$

$=\left(\sqrt{2}(1+i)\right)^2$

$m_1=\frac{-2(1-i)+\sqrt{2}(1+i)}{2i}$

$=\frac{-2+2i+\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2i}$

$=\frac{-2i-2+\sqrt{2}i-\sqrt{2}}{-2}=\frac{-2-\sqrt{2}}{-2}+i\frac{\sqrt{2}-2}{-2}$

$=\frac{2+\sqrt{2}}{2}+i\frac{-\sqrt{2}+2}{2}$

$m_2=\frac{-2(1-i)-\sqrt{2}(1+i)}{2i}$

z_1 et z_2 solution de l'équation $az^2+bz+c=0$

$\Leftrightarrow$ $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$

$z_1.z_2=\frac{c}{a}$

Tronc commun

$(1+i)^2=2i$

$(1-i)^2=-2i$

II On considère l'application S et la rotation $\mathcal{R}$ définies ainsi :

$$S : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P}) \quad M(z) \mapsto M'(z') \qquad \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right) : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P}) \quad M(z) \mapsto M''(z'')$$

Avec : $z' = -(z-1)+1$; $aff(\Omega) = 1+i$; $aff(E) = 1$.

0,25 **1 a** Montrer que S est la symétrie centrale de centre E.

0,25 **b** Montrer l'égalité suivante : $z'' = iz + 2$.

0,50 **2 a** Quelle est la nature du triangle $AM'M''$. $EM'M''$

0,50 **b** Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels les points M'' ; M' ; Ω ; A soient des points cocycliques.

$aff \vec{u} = aff \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$

ou bien $\frac{Z + Z'}{2} = \frac{Z - (Z-1) + 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 = Z_E$

M E M'

donc E milieu de $[MM']$
donc S est la symetrie central de centre E

$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

1) a) Mq : $S = S_E$ il suffit que E milieu de $[MM']$

On a $S(M) = M' \Leftrightarrow Z' = -(Z-1)+1$

$\Leftrightarrow Z' - 1 = -(Z-1)$

$\Leftrightarrow aff(\vec{EM'}) = -(aff(\vec{EM}))$

$\Leftrightarrow \vec{EM'} = -\vec{EM}$

$\Leftrightarrow$ E milieu de $[MM']$

b) $Z'' = iZ + 2$

$R(M) = M'' \Leftrightarrow Z'' - aff\,\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z - aff(\Omega))$

$\Leftrightarrow Z'' - (1+i) = i(Z - 1 - i)$

$\Leftrightarrow Z'' = i(Z-1-i) + (1+i)$

$= iZ - i + 1 + 1 + i$

$Z'' = iZ + 2$ (Formule complexe de la Rotation

2) a) $R(M) = M''$
$S(M) = M'$

II On considère l'application S et la rotation $\mathcal{R}$ définies ainsi :

$$S : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P}) \qquad \mathcal{R}\left(\Omega,\frac{\pi}{2}\right) : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P})$$
$$M(z) \mapsto M'(z') \qquad M(z) \mapsto M''(z'')$$

Avec : $z' = -(z-1)+1$; $aff(\Omega) = 1+i$; $aff(E) = 1$. $A(2)$

0,25 **1** **a** Montrer que S est la symétrie centrale de centre E.

0,25 **b** Montrer l'égalité suivante : $z'' = iz+2$.

0,50 **2** **a** Quelle est la nature du triangle $AM'M''$.

0,50 **b** Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels les points M'' ; M' ; Ω ; A soient des points cocycliques.

$Z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg Z \equiv 0\ [2\pi]$

$Z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg(Z) \equiv \pi\ [2\pi]$

$Z \in \mathbb{R}^{*} \Leftrightarrow \arg Z \equiv 0\ [\pi]$

$AB = |Z_B - Z_A|$

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) [2\pi]$

$A(2)$, $\dfrac{Z''-2}{Z'-2} = \dfrac{iZ+2-2}{-(Z-1)+1-2} = \dfrac{iZ}{-Z} = (-i)$

$\Rightarrow \operatorname{Arg}\left(\dfrac{Z''-2}{Z'-2}\right) \equiv \arg(-i)\ [2\pi]$ et $\left|\dfrac{Z''-2}{Z'-2}\right| = |-i|$

$(\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{AM''}) \equiv -\pi/2\ [2\pi]$

$\dfrac{AM''}{AM'} = 1$

$AM'' = AM'$

donc : $AM'M''$ est isocele et rectangle en A

b

M'', M', Ω, A cocycliques.

$\rightarrow$ On a les points ne sont pas alignés car $AM'M''$ est un triangle

M'', M', Ω et A cocyclique

$\Leftrightarrow \dfrac{Z_{M''} - Z_A}{Z_{M'} - Z_A} \times \dfrac{Z_{M'} - Z_\Omega}{Z_{M''} - Z_\Omega} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (-i) \cdot \dfrac{Z' - Z_\Omega}{Z'' - Z_\Omega} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{Z' - Z_\Omega}{Z'' - Z_\Omega} \in i\mathbb{R}$

II On considère l'application S et la rotation $\mathcal{R}$ définies ainsi :

$$S : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \mapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{array} \qquad \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right) : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \mapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \mapsto & M''(z'') \end{array}$$

Avec : $z' = -(z-1)+1$; $aff(\Omega) = 1+i$; $aff(E) = 1$.

0,25 **1 a** Montrer que S est la symétrie centrale de centre E .

0,25 **b** Montrer l'égalité suivante : $z'' = iz + 2$.

0,50 **2 a** Quelle est la nature du triangle $AM'M''$.

0,50 **b** Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels les points M'' ; M' ; Ω ; A soient des points cocycliques.

$$\frac{z' - z_\Omega}{z'' - z_\Omega} \in i\mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-(z-1)+1-(1+i)}{iz+2-1-i} \in i\mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \frac{-z+1+1-1-i}{iz+1-i} \in i\mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-z+1-i}{iz+1-i} \in i\mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-\bar{z}+1+i}{-i\bar{z}+1+i} = \frac{z-1+i}{iz+1-i}$$

$$\Longleftrightarrow (-\bar{z}+1+i)(iz+1-i) = (z-1+i)(-i\bar{z}+1+i)$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{-iz\bar{z}} \cancel{-\bar{z}} + \cancel{i\bar{z}} + (1+i)iz + 2 = \cancel{-iz\bar{z}} \cancel{+z} + \cancel{i\bar{z}} - 2 + (1-i)i\bar{z}$$

$$\Longleftrightarrow -\bar{z} - z + i\bar{z} - iz$$

on pose $z = x+iy$.

L'equation d'une droite

Rappel

$z \in i\mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \bar{z} = -z$

$\Longleftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

$\Longleftrightarrow Re\, z = 0$

■ Exercice Numéro 2 : (03,50 points)

I Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit : $(E) : \; 2z^2 - (3+i\sqrt{3})a\,z + (1+i\sqrt{3})a^2 = 0 \quad ; \quad z \in \mathbb{C} \quad ; \quad a \in \mathbb{C}^*$

0,25 **1** Montrer que le discriminant de cette équation est $(-1+i\sqrt{3})^2\,a^2$

0,50 **2** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

II Soient : $A(a) \quad ; \quad B(b) \quad ; \quad M(z) \quad ; \quad b = a\,e^{\frac{i\pi}{3}} \quad ; \quad A_1(a_1) \quad ; \quad B_1(b_1)$.

Soient : $r = Rotation\left(M,\frac{\pi}{3}\right) \quad ; \quad A_1 = r^{-1}(A) \quad ; \quad B_1 = r(B)$.

0,50 **1** Vérifier que le triangle OAB est équilatéral.

0,50 **2** **a** Démontrer les égalités suivantes :

$$a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \quad ; \quad b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

0,50	b	Montrer que le quadrilatère OA_1MB_1 est un parallélogramme.
0,50	3 a	Montrer que : $\dfrac{z-b_1}{z-a_1} = -\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \times \dfrac{a}{b}$; $M \neq B$; $M \neq A$
0,75	b	Montrer que : $\{M\,;\,A_1\,;\,B_1\}$ *colinéaires* $\Leftrightarrow$ $\{M\,;\,O\,;\,A\,;\,B\}$ *cocycliques*

■ Exercice Numéro 3 : (03,50 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient : $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$; *tels que* M_1, M_2, O *soient non alignés*.

0,50 **1 a** Soit : $M(z)$; $z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$ Montrer que : $\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1$

0,50 **b** En déduire que M appartient au cercle circonscrit à OM_1M_2.

0,50 **2** Montrer que : $z_2=\overline{z_1} \Rightarrow M \in$ (axe réelle).

3 Soient : $r = rotation(O,\alpha)$; $\alpha \in]0,\pi[$; $M_2 = r(M_1)$; $z_2 = aff(M_2)$

0,50 **a** Calculer z_2 en fonction de z_1 et α.

0,50 **b** En déduire que : $M \in Médiatrice[M_1M_2]$.

4 Soit l'équation : (G) : $6t^2-(e^{i\theta}+1)t+(e^{i\theta}-1)=0$; $\theta \in]0,\pi[$.

0,50 **a** Vérifier que $z=2\left(\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right)$ sachant que $\{z_1;z_2\}=solutions(G)$.

0,50 **b** Écrire z sous sa forme trigonométrique en fonction de θ.

■ Exercice Numéro 4 : (07,00 points)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$(Z_1-Z)\times Z_2 = -(Z_2-Z)Z_1$

$(Z_1-Z)Z_2 = \left(Z_1-\frac{2Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}\right)Z_2$

$= \frac{Z_1^2+Z_1Z_2-2Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)}Z_2$

$= \frac{Z_1^2-Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}\times Z_2$

$= \frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}.Z_1Z_2$ (1)

on a : Les points $O\,M_1, M_2, M$ sont non alignés (car M_1, M_2, O non alignés

et $\frac{Z_1-Z_1}{Z_2-Z_1}\times\frac{Z_2-Z_O}{Z_1-Z_O} = -1 \in \mathbb{R}$

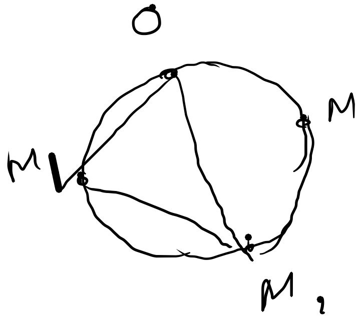
donc Les point O, M_1, M_2 et M

1/a) $Z=\frac{2Z_1.Z_2}{Z_1+Z_2}$

Mq $\frac{Z_1-Z}{Z_2-Z}\times$

$(Z_2-Z)Z_1 = \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}.Z_1Z_2$ (2) c à d $(Z_1-Z)Z_2 = -(Z_2-Z)Z_1$

$\frac{Z_1-Z}{Z_2-Z}\times\frac{Z_2}{Z_1} = -1)$



sont cocycliques

appartenant au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2

■ Exercice Numéro 3 : (03,50 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient : $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$; *tels que* M_1, M_2, O *soient non alignés*.

0,50 **1 a** Soit : $M(z)$; $z = \dfrac{2\,z_1 z_2}{z_1+z_2}$ Montrer que : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1} = -1$

0,50 **b** En déduire que M appartient au cercle circonscrit à OM_1M_2.

0,50 **2** Montrer que : $z_2 = \overline{z_1} \Rightarrow M \in (axe\ réelle)$.

3 Soient : $r = rotation(O,\alpha)$; $\alpha \in]0,\pi[$; $M_2 = r(M_1)$; $z_2 = aff(M_2)$

0,50 **a** Calculer z_2 en fonction de z_1 et α.

0,50 **b** En déduire que : $M \in Médiatrice[M_1M_2]$.

4 Soit l'équation : (G) : $6t^2 - (e^{i\theta}+1)t + (e^{i\theta}-1) = 0$; $\theta \in]0,\pi[$.

0,50 **a** Vérifier que $z = 2\left(\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right)$ sachant que $\{z_1; z_2\} = solutions(G)$.

0,50 **b** Écrire z sous sa forme trigonométrique en fonction de θ.

■ Exercice Numéro 4 : (07,00 points)

$Z_2 = \overline{Z}_1 \Longrightarrow \widetilde{Z \in \mathbb{R}}$

$M(Z) \in (Ox)$

$Z \in \mathbb{R}$

on suppose que $Z_2 = \overline{Z}_1$

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{2 Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)} = \frac{2\,\overline{Z}_1 . \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} = \frac{2 Z_2 Z_1}{Z_2 + Z_1} = Z$$

donc $Z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow M(Z) \in (Ox)$.

$MM_1 = MM_2$

$M \in$ à la médiatrice de M_1M_2

3/ $r(O,\alpha)$

ⓐ $r(M_1) = M_2 \Longleftrightarrow Z_2 - Z_O = e^{i\alpha}(Z_1 - Z_O)$

$\Longleftrightarrow \boxed{Z_2 = e^{i\alpha} Z_1}$

ⓑ $$\frac{Z_1 - Z}{Z_2 - Z} \times \frac{Z_2}{Z_1} = -1 \Longrightarrow \left|\frac{Z_1 - Z}{Z_2 - Z}\right| \left|\frac{Z_2}{Z_1}\right| = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{MM_1}{MM_2} \times |e^{i\alpha}| = 1$$

■ **Exercice Numéro 3 : (03,50 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient : $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$; *tels que* M_1, M_2, O *soient non alignés* .

0,50 **1** **a** Soit : $M(z)$; $z = \frac{2\,z_1 z_2}{z_1+z_2}$ Montrer que : $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$

0,50 **b** En déduire que M appartient au cercle circonscrit à OM_1M_2.

0,50 **2** Montrer que : $z_2 = \overline{z_1} \Rightarrow M \in (axe\ réelle)$.

3 Soient : $r = rotation(O,\alpha)$; $\alpha \in]0,\pi[$; $M_2 = r(M_1)$; $z_2 = aff(M_2)$

0,50 **a** Calculer z_2 en fonction de z_1 et α .

0,50 **b** En déduire que : $M \in Médiatrice[M_1M_2]$.

4 Soit l'équation : (G) : $6\,t^2 - (e^{i\theta}+1)t + (e^{i\theta}-1) = 0$; $\theta \in]0,\pi[$.

0,50 **a** Vérifier que $z = 2\left(\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right)$ sachant que $\{z_1; z_2\} = solutions(G)$

0,50 **b** Écrire z sous sa forme trigonométrique en fonction de θ .

■ **Exercice Numéro 4 : (07,00 points)**

4/ a) $Z = \frac{2Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$

On sait que Z_1 et Z_2 solu de l'équation $aZ^2+bZ+c=0$

$$\iff \begin{cases} Z_1+Z_2 = -b/a \\ Z_1 . Z_2 = c/a \end{cases}$$

donc $Z_1+Z_2 = \frac{e^{i\theta}+1}{6}$

$Z_1 . Z_2 = \frac{e^{i\theta}-1}{6}$

d'où $Z = 2\,\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

$$Z = 2\,\frac{\cancel{e^{i\frac{\theta}{2}}}\left(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}\right)}{\cancel{e^{i\theta/2}}\left(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}\right)}$$

$$= \frac{2\,(2i\sin\theta/2)}{2\cos(\theta/2)}$$

$$= 2\tan\frac{\theta}{2} . e^{i\pi/2}$$

on a $0 < \frac{\theta}{2} < \pi$

$\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} > 0$

d'où $\boxed{Z = \left(2\tan\frac{\theta}{2}\right) . e^{i\pi/2}}$

$$|Z| . (\cos\theta + i\sin\theta) = |Z| . e^{i\theta}$$

Filières : SMA - SMB	Ministère de l'Education Nationale De la Formation professionnelle de l'Eseignement supérieur & de la Recherche scientifique	BACCALAURÉAT
Coefficient : 9		Session Rattrapage
Durée : 4 heures		Juillet 2008

Exercice Numéro 1 : (03,50 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit r l'application définie ainsi : $r : M(z) \mapsto M_1(z_1)$.

avec : $z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$

Soit h l'application définie ainsi : $h : M(z) \mapsto M_2(z_2)$.
avec : $z_2 = -2z + 3i$

Soit F l'application définie ainsi : $F = h \circ r$.

1,00 **1** Déterminer la nature de chacune des applications r et h.

2 Soient : $\Omega(i)$; $A(a)$; $M(z)$; $M'(z')$; $a \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$.

Soient : $B = F(A)$; $C = F(B)$; $D = F(C)$.

$\vec{u}(1)$

$\vec{v}(i)$

$M(x+iy)$
$\shortparallel$
$M(z)$

$F = h \circ r$

On pose $a = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

On a : $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ et $|a| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

donc r est une rotation de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$
c.à.d $\Omega(i)$ et d'angle

$|a| = 1 \Rightarrow a = e^{i\alpha}$

$\alpha \equiv \arg(a)\ [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$r\left(\Omega(i), \frac{\pi}{3}\right)$

$a \in \mathbb{R}$: $a = 1 \Downarrow$ Translation ; $a \neq 1 \Downarrow$ homothétie

$a \notin \mathbb{R}$: $|a| = 1 \Downarrow$ Rotation ; $|a| \neq 1 \Downarrow$ $h \circ r = r \circ h$.

$z_2 = -2z + 3i$

on pose $a_1 = -2$ et $b_1 = 3i$

$a_1 = -2 \in \mathbb{R}$ et $a_1 \neq 1$

donc h est une homothétie
de centre $\Omega\left(\frac{b_1}{1-a_1}\right)$ c.à.d $\Omega(i)$
et de rapport $k = -2$

$h(\Omega(i), k = -2)$

avec : $z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$

Soit h l'application définie ainsi : $h : M(z) \mapsto M_2(z_2)$.
avec : $z_2 = -2z + 3i$

M(

Soit F l'application définie ainsi : $F = h \circ r$.

00 **1** Déterminer la nature de chacune des applications r et h.

2 Soient : $\Omega(i)$; $A(a)$; $M(z)$; $M'(z')$; $a \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$.

Soient : $B = F(A)$; $C = F(B)$; $D = F(C)$.

50 **a** Montrer que : $F(M) = M' \Rightarrow z' - i = 2\,e^{\frac{4i\pi}{3}}(z - i)$.

25 **b** Montrer que Ω est le seul point qui vérifie : $F(\Omega) = \Omega$.

75 **3** **a** Donner, en fonction de a, les nbrs : $b = aff(B)$; $c = aff(C)$; $d = aff(D)$

25 **b** Montrer que les points Ω ; A ; D sont colinéaires.

50 **c** Montrer que : $\Omega = barycentre\{(B,4)$; $(C,2)$; $(D,1)\}$

25 **d** Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour lesquels $D \in (l'axe\ réelle)$

2 ⓐ $F(M) = M' \Rightarrow Z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(Z - i)$

Soit $M(Z)$ et $M'(Z')$ et $M_1(Z_1)$

$F(M) = M' \Leftrightarrow h \circ r(M) = M'$

$\Leftrightarrow h(r(M)) = M'$

$\Leftrightarrow h(M_1) = M'$

$h(M_1) = M' \Leftrightarrow Z' - Z_\Omega = -2(Z_1 - i)$

$\Leftrightarrow Z' - i = -2(Z_1 - i)$

$r(M) = M_1 \Leftrightarrow Z_1 - i = e^{i\pi/3}(Z - i)$

$\Rightarrow Z' - i = -2\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)(Z - i)$

$= 2e^{i\pi} \cdot e^{i\pi/3}(Z - i)$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Royaume du Maroc
Ministère de l'Education Nationale
De la Formation professionnelle
de l'Enseignement supérieur
& de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2008

■ **Exercice Numéro 1 : (03.50 points)**

avec : $z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$

Soit h l'application définie ainsi : $h : M(z) \mapsto M_2(z_2)$.
avec : $z_2 = -2z + 3i$

Soit F l'application définie ainsi : $F = h \circ r$.

00 **1** Déterminer la nature de chacune des applications r et h.

2 Soient : $\Omega(i)$; $A(a)$; $M(z)$; $M'(z')$; $a \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$.

Soient : $B = F(A)$; $C = F(B)$; $D = F(C)$.

50 **a** Montrer que : $F(M) = M' \Rightarrow z' - i = 2\,e^{\frac{4i\pi}{3}}(z-i)$.

25 **b** Montrer que Ω est le seul point qui vérifie : $F(\Omega) = \Omega$.

75 **3** **a** Donner, en fonction de a, les nbrs : $b = aff(B)$; $c = aff(C)$; $d = aff(D)$

25 **b** Montrer que les points Ω ; A ; D sont colinéaires.

50 **c** Montrer que : $\Omega = barycentre\{(B,4) ; (C,2) ; (D,1)\}$

25 **d** Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour lesquels $D \in (l'axe\ réelle)$

$F = \Omega \circ h$

Ω

F

Dm $Z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(Z-i)$

$Z' = aZ + b$
$T(M) = M$ ✓
$\iff Z = aZ + b$
$\iff Z(1-a) = b$
$\iff Z_\Omega = \frac{b}{1-a}$

b) $F(\Omega) = \Omega$

$M(Z)$

Soit $M \in (P)$

$F(M) = M \iff Z - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(Z-i)$
$\iff (Z-i)\left(1 - 2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right) = 0$
$\iff Z - i = 0$ ou $1 - 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 0$ imp
$\iff Z = i = Z_\Omega$

$e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1/2$

$1 - 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 0$

$e^{i\frac{4\pi}{3}} \neq 1/2$

I

1) $aZ^2+bZ+c=0$

$\Delta = \delta^2 \neq 0$

$Z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$

2) $Z_1+Z_2 = -b/a$ et $Z_1 \times Z_2 = c/a$

II

$\underbrace{aZ^3+bZ^2+cZ+d}_{P(Z)}=0$

$\underbrace{Z_0 = x \in \mathbb{R}}$ $\qquad Z_0 = iy$

$aZ_0^3+bZ_0^2+cZ_0+d=0$

$\iff (Re(P)) + i(Im(Z)) = 0$

$\begin{cases} Re = 0 \\ Im = 0 \end{cases}$

$P(Z)=0 \iff (Z-Z_0)(\alpha Z^2+\beta Z+\gamma)=0$

α, β et γ à déterminer.

. (identification égalité de 2 poly.

. Horner - Division Eucl

$P(Z) = 2Z^3+(1+i)Z^2+2Z+i$

$$\begin{array}{l|l} P(Z) & Z-i \\ \hline & 2Z^2+(1+3i)Z+(i-1) \\ -1 & \alpha \qquad \beta \qquad \gamma \end{array}$$

	2	1+i	2	i
$Z_0=i$	0	2i +	-3+i	-1-i
	2	1+3i	i-1	-1 = Rest

$2Z^2+(1+3i)Z+(i-1)$

Les racines d'ordre n

Z est racine n^e de u

$\iff Z^n = u = re^{i\theta}$

$\implies Z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$

$k \in \{0, \dots, n-1\}$

Astuce

$Z^n = r e^{i(\theta+2k\pi)}$

$Z_k = \sqrt[n]{r e^{i(\theta+2k\pi)}}$

$= \sqrt[n]{r}\left(e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}\right)$

Les racines carrés (Forme algébrique)

$Z^2 = a+ib \iff (x+iy)^2 = a+ib$

$x^2-y^2+2ixy = a+ib$

$\begin{cases} x^2-y^2=a \quad (1) \\ 2xy=b \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \quad (2) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \\ |Z|^2=|a+ib| \end{cases}$

- $Z_1 = -\sqrt{3} - i$

$$Z = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

$|Z_2| = 2$ et $\operatorname{Arg} Z \equiv -\frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$

$$= -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

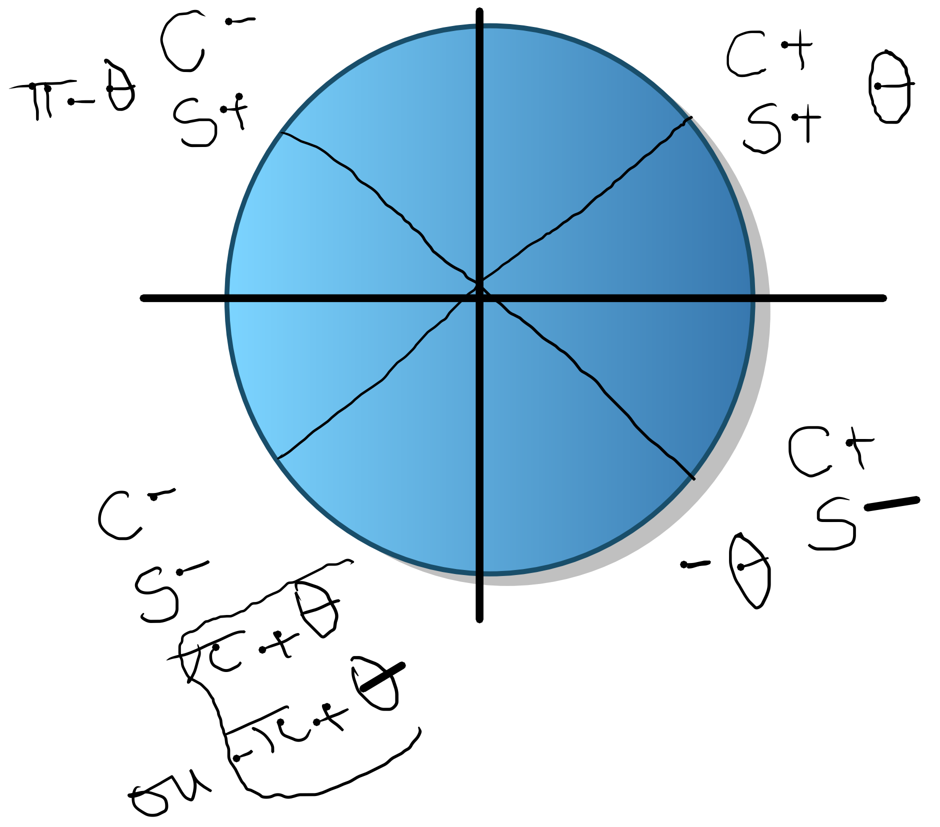
$-\frac{5\pi}{6}$ principal $]-\pi,\pi]$

$\frac{7\pi}{6} \notin]-\pi,\pi]$

$-1 = e^{i\pi}$

$i = e^{i\pi/2}$

$-i = e^{-i\pi/2}$



- **Angle moitié**

$$1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\theta/2}\right) = \underbrace{2\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)}_{>0} e^{i\theta/2}$$

$$1-e^{i\theta} =$$

$$e^{i\theta}+e^{i\theta'} = e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}_{\text{positive}} \cdot e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}$$

$$2\arg z \equiv \frac{\pi}{4}\,[\pi] = \frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$\arg z \equiv \frac{\pi}{8}\,\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

$$1+e^{i\pi/6} = e^{i\pi/12}\, 2\cos\frac{\pi}{12}$$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Royaume du Maroc
Ministère de l'Education Nationale
De la Formation professionnelle
de l'Enseignement supérieur
& de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2008

$e^{i2K\pi} = e^0 = 1$

Exercice Numéro 1 : (03.50 points)

avec : $z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$

Soit h l'application définie ainsi : $h : M(z) \mapsto M_2(z_2)$.
avec : $z_2 = -2z + 3i$

Soit F l'application définie ainsi : $F = h \circ r$.

00 **1** Déterminer la nature de chacune des applications r et h.

2 Soient : $\Omega(i)$; $A(a)$; $M(z)$; $M'(z')$; $a \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$.

Soient : $B = F(A)$; $C = F(B)$; $D = F(C)$.

50 **a** Montrer que : $F(M) = M' \Rightarrow z' - i = 2\,e^{\frac{4i\pi}{3}}(z - i)$.

25 **b** Montrer que Ω est le seul point qui vérifie : $F(\Omega) = \Omega$.

75 **3** **a** Donner, en fonction de a, les nbrs : $b = aff(B)$; $c = aff(C)$; $d = aff(D)$

25 **b** Montrer que les points Ω ; A ; D sont colinéaires.

50 **c** Montrer que : $\Omega = barycentre\,\{(B,4)\ ;\ (C,2)\ ;\ (D,1)\}$

25 **d** Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour lesquels $D \in (l'axe\ réelle)$

3) a)

On a $F(A) = B \iff b - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(a-i)$

$F(M) = M'$ $\iff b = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(a-i) + i$

et $F(B) = C \iff c - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(b-i)$

$\iff c - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(2e^{i\frac{4\pi}{3}})(a-i)$

$\iff c - i = 4e^{i\frac{8\pi}{3}}(a-i)$

$\iff c = 4e^{i\frac{8\pi}{3}}(a-i) + i$

et $F(C) = D \iff d - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(c-i)$

$\iff d - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \cdot 4e^{i\frac{8\pi}{3}}(a-i)$

$= 8e^{i4\pi}(a-i)$

$d - i = 8(a-i)$

Conique
ellipse

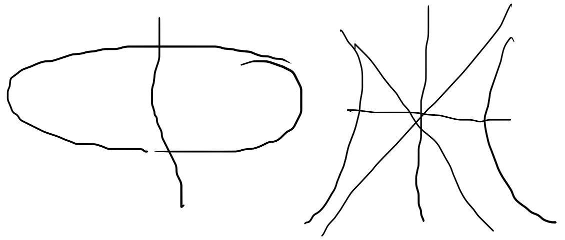
★★★

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Royaume du Maroc
Ministère de l'Éducation Nationale
De la Formation professionnelle
de l'Enseignement supérieur
& de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2008

■ **Exercice Numéro 1 : (03.50 points)**



avec : $z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$

Soit h l'application définie ainsi : $h : M(z) \mapsto M_2(z_2)$.
avec : $z_2 = -2z + 3i$

Soit F l'application définie ainsi : $F = h \circ r$.

00 **1** Déterminer la nature de chacune des applications r et h.

2 Soient : $\Omega(i)$; $A(a)$; $M(z)$; $M'(z')$; $a \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$.

Soient : $B = F(A)$; $C = F(B)$; $D = F(C)$.

50 **a** Montrer que : $F(M) = M' \Rightarrow z' - i = 2\,e^{\frac{4i\pi}{3}}(z-i)$.

25 **b** Montrer que Ω est le seul point qui vérifie : $F(\Omega) = \Omega$.

75 **3** **a** Donner, en fonction de a, les nbrs : $b = aff(B)$; $c = aff(C)$; $d = aff(D)$

25 **b** Montrer que les points Ω ; A ; D sont colinéaires.

50 **c** Montrer que : $\Omega = barycentre\{(B,4)$; $(C,2)$; $(D,1)\}$

25 **d** Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour lesquels $D \in (l'axe\ réelle)$

b) on a $d - i = 8(a-i)$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega D} = 8\,\overrightarrow{\Omega A}$ et Les point Ω, D, A sont distinc
$\Leftrightarrow$ Les point Ω, A, D sont alignee $a \neq i$ et $d \neq i$
$a \neq d$.

si . $\frac{d-i}{a-i} = 8 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

c) $Z_\Omega = \frac{4Z_B + 2Z_C + Z_D}{7}$

$\frac{4Z_B + 2Z_C + Z_D}{7} = \frac{4b + 2c + d}{7} = \frac{4\left(2e^{i\frac{4\pi}{3}}(a-i)+i\right) + 2\left(4e^{i\frac{8\pi}{3}}(a-i)+i\right) + 8(a-i)+i}{7}$

$1 + j + j^2$

$\frac{\left(8e^{i\frac{4\pi}{3}} + 8e^{i\frac{8\pi}{3}} + 8\right)(a-i) + 4i + 2i + i}{7} = \frac{8\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)(a-i) + 7i}{7}$

$= \frac{7i}{7} = i$

$e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1$

Conique / ellipse

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Royaume du Maroc
Ministère de l'Education Nationale
De la Formation professionnelle
de l'Enseignement supérieur
& de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2008

■ Exercice Numéro 1 : (03.50 points)

$$avec \quad : \quad z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) z + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$$

Soit h l'application définie ainsi : $h : M(z) \longmapsto M_2(z_2)$.
$avec \quad : \quad z_2 = -2z + 3i$

Soit F l'application définie ainsi : $F = h \circ r$.

00 **1** Déterminer la nature de chacune des applications r et h .

2 Soient : $\Omega(i)$; $A(a)$; $M(z)$; $M'(z')$; $a \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$.

Soient : $B = F(A)$; $C = F(B)$; $D = F(C)$.

50 **a** Montrer que : $F(M) = M' \Rightarrow z' - i = 2\, e^{\frac{4i\pi}{3}}(z - i)$.

25 **b** Montrer que Ω est le seul point qui vérifie : $F(\Omega) = \Omega$.

75 **3** **a** Donner, en fonction de a, les nbrs : $b = aff(B)$; $c = aff(C)$; $d = aff(D)$

25 **b** Montrer que les points Ω ; A ; D sont colinéaires.

50 **c** Montrer que : $\Omega = barycentre\{(B,4)$; $(C,2)$; $(D,1)\}$

25 **d** Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour lesquels $D \in (l'axe\ réelle)$

$$\frac{\left(8e^{i\frac{4\pi}{3}} + 8e^{i\frac{8\pi}{3}} + 8\right)(a-i) + 4i + 2i + i}{7} = 8(1$$

$= 7$

$A(a)$

$D \in (Ox) \iff d \in \mathbb{R}$

$\iff 8(a-i) + i \in \mathbb{R}$

on pose $a = x + iy$

$\iff 8(x+iy-i) + i \in \mathbb{R}$

$\iff 8x + i(8y - 8 + 1) \in \mathbb{R}$

$\iff 8x + i(8y-7) \in \mathbb{R}$

$\iff 8y - 7 = 0$

$\iff y = 7/8$

D'ou L'ensembl des pont et La droite d'equation $y = 7/8$.

★★★

Examen National du BACCALAURÉAT – Session Ordinaire 2020

Exercice Numéro 2 : (04,50 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit l'équation (E) : $(1-i)z^2 - 2(a+1)z + (1+i)(1+a^2) = 0$

Avec : $z \in \mathbb{C}$; $a \in \mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$

0,75 **1** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Soient : $A(a)$; $B(\beta)$; $C(\alpha)$; $\alpha = a+i$; $\beta = 1+ai$

0,50 **2** On suppose dans cette question que $a = e^{i\theta}$; $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.
Écrire α et β sous la forme trigonométrique.

0,50 **3 a** Montrer l'équivalence suivante : $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \in \mathbb{R} \iff |a| = 1$

0,50 **b** Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour lesquels on ait : les points O ; B ; C soient alignés.

4 On suppose dans cette question que :

$$|a| = 1 \quad et \quad a^2 + a(2i-1) - 1 \neq 0$$

0,75 **a** Montrer que : $\left(\frac{\alpha^2}{a}\right) \in i\mathbb{R}^*$

0,50 **b** Montrer qu'il existe un nombre complexe ω tel que :

« 2020 »

- espace vect
- $\log_a$, $\exp_a$
- volum
- équ-diff

$$\Delta = (2(a+1))^2 - 4(1+i)(1+a^2)(1-i)$$
$$= 4(a^2+2a+1) - 8(1+a^2)$$
$$= -4a^2 + 8a - 4$$
$$= -4(a^2 - 2a + 1)$$
$$= (2i(a-1))^2 =$$

si $a = 1$ alors $z = \frac{-b}{2a} = 1+i$

si $a \neq 1$

$$z_1 = \frac{2(a+1) - 2i(a-1)}{2(1-i)} \quad , \quad z_2 = \frac{2(a+1) + 2i(a-1)}{2(1-i)}$$

$\alpha = a+i$ et $\beta = 1+ia$

2/ $\alpha = a+i = e^{i\theta} + e^{i\pi/2} = e^{i\left(\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta-\pi/2}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta-\pi/2}{2}\right)}\right)$

$$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi/2}{2}\right)}$$

(à vérifier.)

$$\beta = 1+ai = 1 + e^{i\theta}\cdot e^{i\pi/2}$$
$$= 1 + e^{i(\theta+\pi/2)}$$
$$= e^{i\left(\frac{\theta+\pi/2}{2}\right)}(2)\cos\left(\frac{\theta+\pi/2}{2}\right)$$
$$= e^{i\pi}\cdot e^{i\left(\frac{\theta+\pi/2}{2}\right)}\left(-2\cos\left(\frac{\theta+\pi/2}{2}\right)\right)$$
$$= e^{i\left(\pi + \frac{\theta+\pi/2}{2}\right)}\left(-2\cos\left(\frac{\theta+\pi/2}{2}\right)\right)$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\pi < \theta + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} < \frac{\theta+\pi/2}{2} < \frac{3\pi}{4}$

les points O ; B ; C soient alignés.

4 On suppose dans cette question que :

$$|a| = 1 \qquad et \qquad a^2 + a(2i-1) - 1 \neq 0$$

0,75 **a** Montrer que : $\left(\dfrac{\alpha^2}{a}\right) \epsilon\, i\mathbb{R}^*$

0,50 **b** Montrer qu'il existe un nombre complexe ω tel que :

$$\frac{\alpha^2 - \omega}{a - \omega} = i \qquad et \qquad \omega \neq 0$$

0,25 **c** Montrer que les points O ; Ω ; D ; A sont cocycliques, $\Omega(\omega)$; $D(\alpha^2)$

0,75 **d** Soit (C) le cercle circonscrit au quadrilatère ΩDAO.

Soit $R = rotation\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$, Montrer que $R(A) = D$, en déduire $rayon(C)$