ln

→ ln est la primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 sur $]0,+\infty[$

c.à.d $(\forall x>0)$ $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ et $\ln(1)=0$

→ Les propriétés

- ln est continue et strictement ↗ sur $]0,+\infty[$
- $\ln(a.b) = \ln(a)+\ln(b)$
- $\ln(1/a) = -\ln(a)$
- $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^r) = r\ln(a)$ $\quad r \in \mathbb{Q}$
- $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\ln(a)$

→ Le signe de Ln

sur $]0,1] \Rightarrow 0 < x \leq 1$

$\Rightarrow \ln(x) \leq \ln(1)$

$\ln(x) \leq 0$

sur $]1,+\infty[\Rightarrow x>1$ et ln ↗

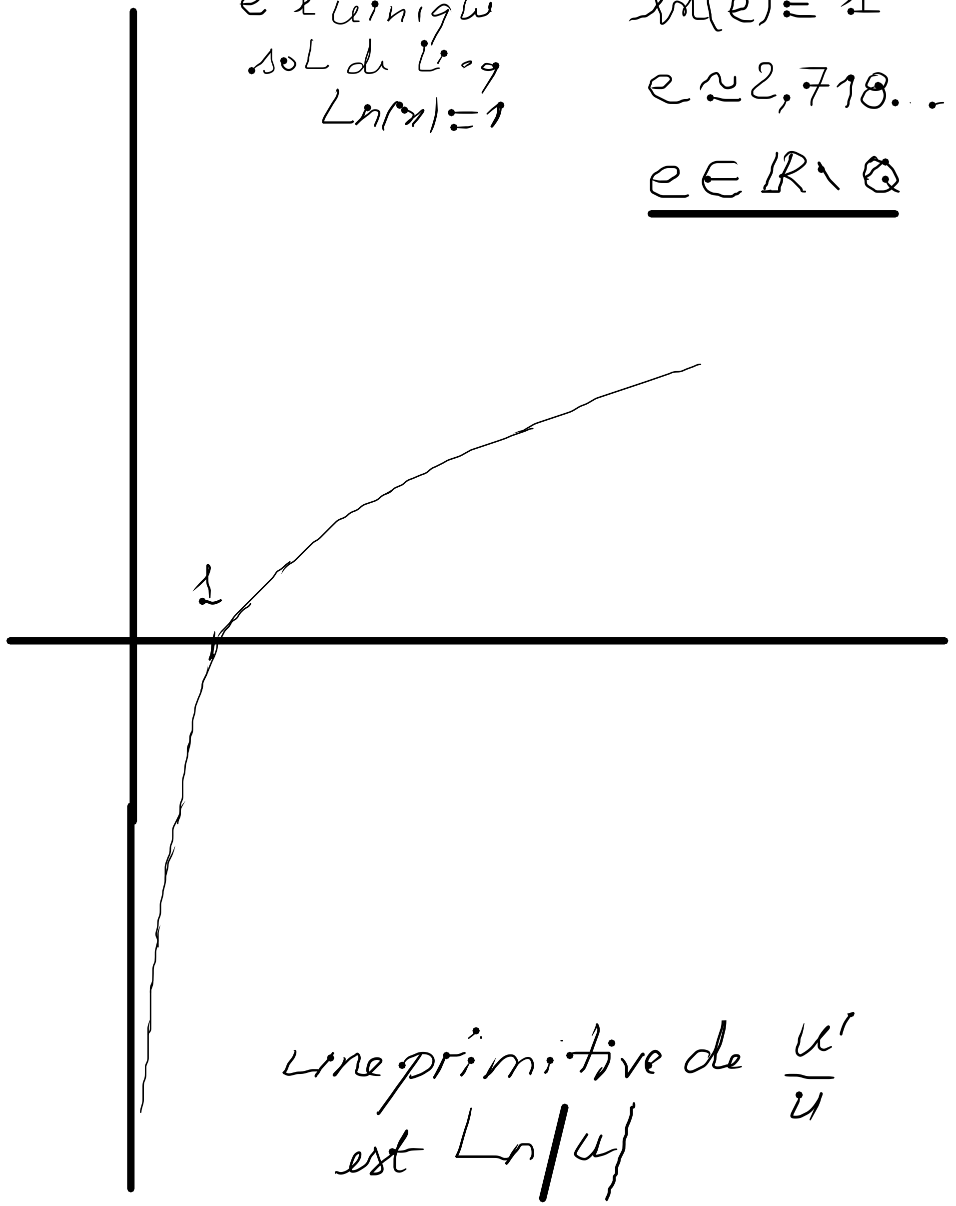
$\ln(x) > 0$

e l'unique sol de l'eq $\ln(x)=1$

$\ln(e) = 1$

$e \simeq 2,718...$

$e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$



une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$

→ Limites de Ln

- $\lim_{0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{+\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\boxed{\text{Forme indéterminée } \frac{0}{0},\ 0\times\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ (+\infty)+(-\infty)}$
- $\lim_{0^+} x^n \ln(x) = 0$ (0^-), $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ (le nombre dérivé)

On pose $X = x-1$ qd $x \to 1$, $X \to 0$

donc $x = 1+X$

- $\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

→ La dérivée

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

U strictement >0 et dérivable.

Exp

. La fonction reciproque de Ln.

exp : $\mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$

$x \longmapsto e^x$

Propriété

$e^x . e^y = e^{x+y}$, $e^0 = 1$

$e^{-x} = 1/e^x$. $e^1 = e$

$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

$(e^x)^r = e^{rx}$

$e^{Ln(x)} = x$, $Ln(e^x) = x$

$y = e^x \Leftrightarrow x = Ln y$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$f^{-1}(f(x)) = x$

$f(x) = y$

$\Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}$

→ $(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x > 0$

→ exp : continue et str croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim_{-\infty} e^x = 0$ (c'est un un 0^+)

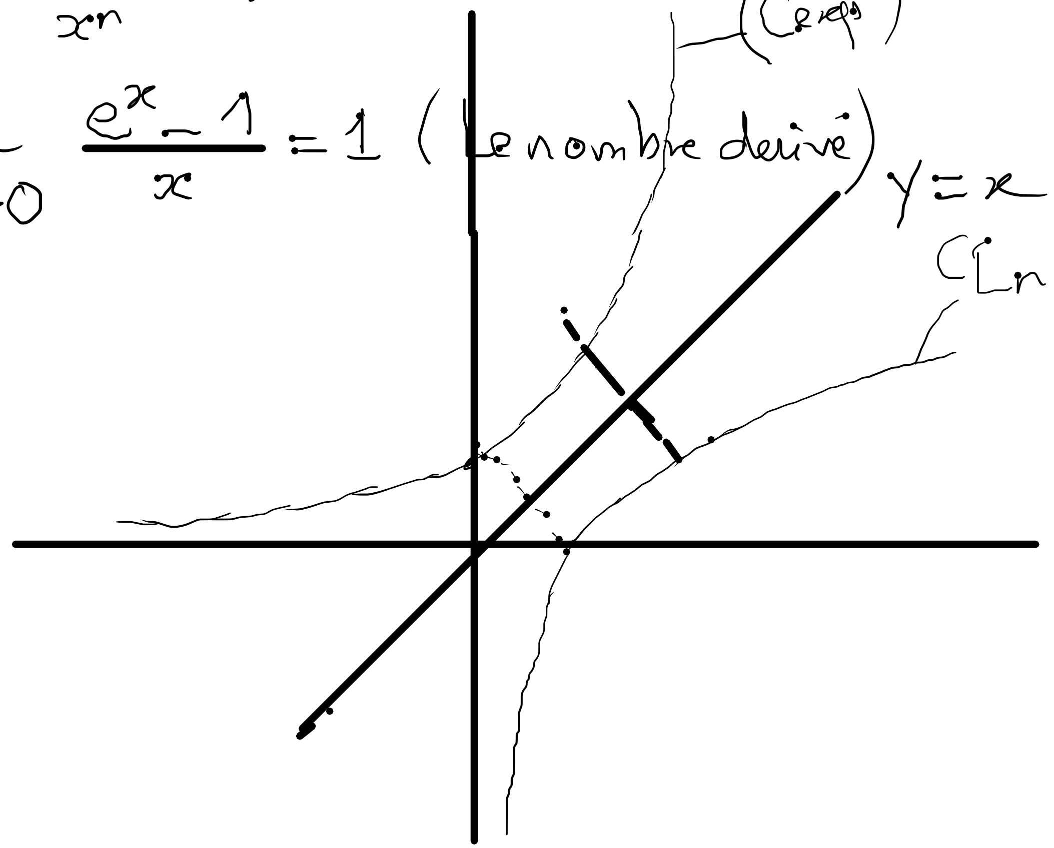
$\lim_{+\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{-\infty} x^2 e^x = 0$

$\lim_{-\infty} x^n e^x = 0$ (ça depend de n)

$\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (Le nombre derivé)



$(e^U)' = U'e^U$.

U dérivable

$(x>0)$

$(e^{\sqrt{x}})' = (\sqrt{x})'(e^{\sqrt{x}})$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

2,718 . .

$e^x = 3$

$x = Ln($

$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

$\frac{N(t)}{N_0} = e^{-\lambda t}$

$\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = -\lambda t$

$\ln\left(\frac{N_0}{N(t)}\right) = \lambda t$

$t = \frac{1}{\lambda} Ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$

Limites Ln

$\rightarrow \lim_{0^+} x(\ln(x))^2 = \lim_{0^+} \left(\sqrt{x}\ln(x)\right)^2$

$= \lim_{0^+} \left(\sqrt{x}\,\ln(\sqrt{x})^2\right)^2$

on pose $t = \sqrt{x}$.

$= \lim_{x\to 0^+} \left(2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\right)^2$

$= \lim_{t\to 0^+} (2t\ln t)^2 = 0$

car $\lim_{0^+} (t\ln t) = 0$

$\rightarrow \lim_{+\infty} \frac{\ln^3(x)}{x^2} = \lim_{+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^{2/3}}\right)^3$

on pose $t = x^{2/3} \Leftrightarrow x = t^{3/2}$

$= \lim_{+\infty} \left(\frac{\ln(t^{3/2})}{t}\right)^3$

$= \lim_{+\infty} \left(\frac{3}{2}\frac{\ln(t)}{t}\right)^3 = 0$

$\rightarrow \lim_{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2+2} = \lim_{+\infty} \underbrace{\cancel{\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}}}_{0} \cdot \frac{(x+1)}{x^2+2}$

$0 \times 0 = 0$

car $\begin{cases} \lim_{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \\ \lim. \end{cases}$

$\rightarrow \lim_{+\infty} \frac{\ln(x^2+2)}{x+1} = \lim_{+\infty} \frac{\ln(x^2+2)}{\sqrt{x^2+2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}$

$= \lim_{+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2}{\sqrt{x^2+2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}$

$= \lim_{+\infty} \underbrace{\cancel{2\frac{\ln\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}}}_{0} \cdot \sqrt{\frac{x^2+2}{(x+1)^2}}$

$0 \times 1 = 0$

Limiti de l'exp

$$\cdot \lim_{-\infty} (x^2+1) e^{\underbrace{x^3+\sqrt{3}x}_{\to -\infty}} = \lim_{-\infty} \underbrace{(x^3+\sqrt{3}x)}_{X \to 0} e^{\overbrace{x^3+\sqrt{3}x}^{X}} \cdot \frac{x^2+1}{x^3+\sqrt{3}x} \to 0$$

$= 0$ car $\begin{cases} - \\ - \end{cases}$

$e^{\sqrt{x+1}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0\}$
$= [-1, +\infty[$

$$\lim_{-\infty} X^n e^X = 0$$

$$\lim_{+\infty} \frac{e^X}{X^n} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x)+1}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln(x)+1 \neq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ et } \ln x \neq -1\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ et } x \neq e^{-1}\}$
$D_f =]0, 1/e[\cup]1/e, +\infty[$

$$\cdot \lim_{-\infty} \frac{e^{x^2+1}}{x^3+\sqrt{3}x} = \lim_{-\infty} \left(\frac{e^{x^2+1}}{(x^2+1)^2}\right)_{\to +\infty} \times \frac{(x^2+1)^2}{x^3+\sqrt{3}x}_{\to -\infty}$$

car

$= -\infty$

$$\frac{e^X}{X}$$

$$\frac{x^4}{x^3} = x$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0 \quad r \in \mathbb{Q}$$

$f(x) = \ln|x-1|$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$

Exercice10: Considérons la fonction f définie

par : $f\left(x\right)=\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux

bornes de D_f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe C_f.

Exercice10: Considérons la fonction f définie

par : $f\left(x\right)=\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux

bornes de D_f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe C_f.

Exercice10: Considérons la fonction f définie

par : $f(x)=\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux

bornes de D_f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe C_f.

Exercice10: Considérons la fonction f définie par : $f\left(x\right)=\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe C_f.

Exercice10: Considérons la fonction f définie

par : $f(x)=\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux

bornes de D_f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe C_f.

Exercice13 :

Partie 1 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}+$ par : $f(x)=(x+2)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la limite en $+\infty$

4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f.

5) a) Montrer que $(\forall t>0)$ $0 \prec e^{-t}+t-1 \prec \frac{t^2}{2}$

Exercice13 :

Partie 1 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}+$

par : $f(x)=(x+2)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la limite en $+\infty$

4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f.

5) a) Montrer que $(\forall t > 0)$ $0 \prec e^{-t} + t - 1 \prec \frac{t^2}{2}$

Exercice13 :

Partie 1 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}+$ par : $f(x)=(x+2)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la limite en $+\infty$

4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f.

5) a) Montrer que $(\forall t>0)$ $0 \prec e^{-t}+t-1 \prec \frac{t^2}{2}$

5) a) Montrer que $(\forall t > 0)$ $0 \prec e^{-t} + t - 1 \prec \frac{t^2}{2}$

b) En déduire que : $(\forall x > 0)$

$$\frac{-4}{x} \prec f(x) - x \prec \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$

6) Construire la courbe C_f.

5) a) Montrer que $(\forall t > 0)$ $0 \prec e^{-t} + t - 1 \prec \dfrac{t^2}{2}$

b) En déduire que : $(\forall x > 0)$

$$\frac{-4}{x} \prec f(x) - x \prec \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$

6) Construire la courbe C_f.

5) a) Montrer que $(\forall t > 0)$ $0 \prec e^{-t} + t - 1 \prec \frac{t^2}{2}$

b) En déduire que : $(\forall x > 0)$

$$\frac{-4}{x} \prec f(x) - x \prec \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$

6) Construire la courbe C_f.

5) a) Montrer que $(\forall t > 0)$ $0 \prec e^{-t} + t - 1 \prec \dfrac{t^2}{2}$

b) En déduire que : $(\forall x > 0)$

$$\frac{-4}{x} \prec f(x) - x \prec \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$

6) Construire la courbe C_f.

Problème (8 points) :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2e^{x(2-x)} & ; \quad x\leq 2 \\ f(x)=1+(x-2)^2\ln(x-2) & ; \quad x>2 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1cm)

0.5 1) Montrer que la fonction f est continue au point 2

0.25 2) a) Vérifier que pour tout $x<2$ et $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=xe^{x(2-x)}-x.\dfrac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}$

0.5 b) Montrer que f est dérivable à gauche en 2.

0.75 c) Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2)=0$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.25 3) a) Vérifier que pour tout $x\leq 2, f(x)=x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

0.75 c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.5 4) a) Montrer que pour tout $x<2$, $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$

0.5 b) Montrer que pour tout $x>2$, $f'(x)=(x-2)\big(1+2\ln(x-2)\big)$

Problème (*8 points*) :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2e^{x(2-x)} & ; \quad x\leq 2 \\ f(x)=1+(x-2)^2\ln(x-2) & ; \quad x>2 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 1cm)

0.5 1) Montrer que la fonction f est continue au point 2

0.25 2) a) Vérifier que pour tout $x<2$ et $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=xe^{x(2-x)}-x.\dfrac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}$

0.5 b) Montrer que f est dérivable à gauche en 2.

0.75 c) Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2)=0$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.25 3) a) Vérifier que pour tout $x\leq 2, f(x)=x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

0.75 c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.5 4) a) Montrer que pour tout $x<2$, $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$

0.5 b) Montrer que pour tout $x>2$, $f'(x)=(x-2)\left(1+2\ln(x-2)\right)$

Problème (*8 points*) :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2 e^{x(2-x)} & ; \quad x\leq 2 \\ f(x)=1+(x-2)^2\ln(x-2) & ; \quad x>2 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1cm)

0.5 1) Montrer que la fonction f est continue au point 2

0.25 2) a) Vérifier que pour tout $x<2$ et $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=xe^{x(2-x)}-x.\dfrac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}$

0.5 b) Montrer que f est dérivable à gauche en 2.

0.75 c) Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2)=0$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.25 3) a) Vérifier que pour tout $x\leq 2, f(x)=x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

0.75 c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.5 4) a) Montrer que pour tout $x<2$, $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$

0.5 b) Montrer que pour tout $x>2$, $f'(x)=(x-2)\big(1+2\ln(x-2)\big)$

Problème (*8 points*) :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2e^{x(2-x)} & ; \quad x\leq 2 \\ f(x)=1+(x-2)^2\ln(x-2) & ; \quad x>2 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1cm)

0.5 1) Montrer que la fonction f est continue au point 2

0.25 2) a) Vérifier que pour tout $x<2$ et $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=xe^{x(2-x)}-x.\dfrac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}$

0.5 b) Montrer que f est dérivable à gauche en 2.

0.75 c) Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2)=0$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.25 3) a) Vérifier que pour tout $x\leq 2, f(x)=x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

0.75 c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.5 4) a) Montrer que pour tout $x<2$, $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$

0.5 b) Montrer que pour tout $x>2$, $f'(x)=(x-2)\big(1+2\ln(x-2)\big)$

Problème (*8 points*) :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2e^{x(2-x)} & ; \quad x\leq 2 \\ f(x)=1+(x-2)^2\ln(x-2) & ; \quad x>2 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1cm)

0.5 1) Montrer que la fonction f est continue au point 2

0.25 2) a) Vérifier que pour tout $x<2$ et $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=xe^{x(2-x)}-x.\dfrac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}$

0.5 b) Montrer que f est dérivable à gauche en 2.

0.75 c) Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2)=0$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.25 3) a) Vérifier que pour tout $x\leq 2, f(x)=x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

0.75 c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.5 4) a) Montrer que pour tout $x<2$, $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$

0.5 b) Montrer que pour tout $x>2$, $f'(x)=(x-2)(1+2\ln(x-2))$

0.5	4) a) Montrer que pour tout $x<2$, $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$
0.5	b) Montrer que pour tout $x>2$, $f'(x)=(x-2)(1+2\ln(x-2))$
0.5	c) Résoudre dans l'intervalle $]2,+\infty[$, l'inéquation $1+2\ln(x-2)\leq 0$
0.75	d) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
1	5) Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
	(On donne : $f(3)=1$; $2+\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 2.6$ et $f\left(2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\approx 0.8$)

0.5	4) a) Montrer que pour tout $x<2$, $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$
0.5	b) Montrer que pour tout $x>2$, $f'(x)=(x-2)(1+2\ln(x-2))$
0.5	c) Résoudre dans l'intervalle $]2,+\infty[$, l'inéquation $1+2\ln(x-2)\leq 0$
0.75	d) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
1	5) Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
	(On donne : $f(3)=1$; $2+\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 2.6$ et $f\left(2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\approx 0.8$)

0.5	4) a) Montrer que pour tout $x<2$, $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$
0.5	b) Montrer que pour tout $x>2$, $f'(x)=(x-2)(1+2\ln(x-2))$
0.5	c) Résoudre dans l'intervalle $]2,+\infty[$, l'inéquation $1+2\ln(x-2)\leq 0$
0.75	d) Etudier le signe de $f'(x)$ sur □ puis dresser le tableau de variations de f sur □
1	5) Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
	(On donne : $f(3)=1$; $2+\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 2.6$ et $f\left(2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\approx 0.8$)