Exercice 1

Dans chacun des cas suivants étudier la dérivabilité de f en a :

$x_0 = 3 \quad ; \quad f(x) = \sqrt{2x+3} - 2$	$a = -1 \quad ; \quad f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x - 1}$	$a = 2 \quad ; \quad f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$
$\begin{cases} f(x) = x^2 E\left(\dfrac{2}{x}\right) & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad a = 0$	$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x - 2\sin x}{x - \sin 2x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad a = 0$	$a = 0 \quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 2

Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche du point a dans les cas ci-dessous :

$a = 0 \; ; \quad f(x) = x\left\|\sin(2x)\right\|$	$a = -2 \quad ; \quad f(x) = \dfrac{\left\|x^2 + 2x\right\| - 3}{\|x\| - 1}$	$a = -1 \quad ; \quad f(x) = \dfrac{\left\|x^2 + x\right\| + 2}{\|x\| + 1}$
$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+2} & ; \; x \geq -1 \\ f(-1) = x^2 + 2x & ; \; x < -1 \end{cases} \quad a = -1$	$a = 0 \quad \begin{cases} f(x) = xE\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$	$a = 2 \quad ; \quad f(x) = (x-2)E(x)$

Exercice 3

En utilisant la notion de dérivabilité en un point déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\tan^2 x - 3}{3x - \pi}$	$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(8x+15)^7 + 1}{x + 2}$	$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n \sin x - a^n \sin a}{x - a}$
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2(5x-4)^3 - 1}{x - 1}$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-x)^n - \left(1 - x^2\right)^n}{x}$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\cos x - \sin 2x)^3 - 1}{x}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ déterminer a et b sachant que la droite $(\Delta)\; y = 4x + 3$ est tangente à la courbe (C_f) en $A(0,3)$

Exercice 5

Soit f la fonction telle que $f(x) = \dfrac{x^2 + a}{bx + 1}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Déterminer les réels b , a pour que (C_f) admet au point $I(0,2)$ une tangente parallèle à la droite $(\Delta)\, 2x + y - 1 = 0$

Exercice 6

Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f'(0) = a$ calculer en fonction de a les limites

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(3x) - f(-2x)}{x} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{3f(2x) + 2f(3x) - 5f(0)}{x}$$

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants calculer la dérivée $f'(x)$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$	$f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$	$f(x) = x\sqrt{2x-1} + 5$	$f(x) = 2x - \sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$

$f(x)=\dfrac{x^3}{x-3}$	$f(x)=x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$	$f(x)=x^2\sqrt{4x+3}$	$f(x)=(2x-3)\sqrt{x}+1$
$f(x)=\dfrac{2\sin x+1}{1-\cos x}$	$f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$	$f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3$	$f(x)=\dfrac{x+2x+2}{x^2-2x+2}$

Exercice 8

On considère la fonction f définie par :

$f(x)=x+\sqrt{|x^2-x|}$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) étudier la dérivabilité f à droite et à gauche de 0

b) étudier la dérivabilité f à droite et à gauche de 1

Soit f la fonction telle que : $f(x)=\dfrac{x^2}{x|x|+1}$

1) déterminer le domaine de la fonction f

2) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)$

4) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 0

Exercice 9

Soient a un réel de $\mathbb{R}^*$ et b de $\mathbb{R}^+$. on considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{a}E\left(\dfrac{3}{x}\right) & : x>0 \\ f(0)=0 \\ f(x)=\dfrac{2\cos(bx)-3\cos\left(x\sqrt{2}\right)+1}{x} & : x<0 \end{cases}$$

1) a) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ \left|\dfrac{x}{a}E\left(\dfrac{3}{x}\right)-\dfrac{3}{a}\right|\le\left|\dfrac{x}{a}\right|$

b) en déduire que f est dérivable à droite de 0 et $f_d'(0)=\dfrac{3}{a}$

2) montrer que f est dérivable à gauche de 0 et $f_g'(0)=3-b^2$

3) déterminer b , a pour que f soit dérivable en 0 et la tangente en 0 est perpendiculaire à la droite (Δ) $x-y=0$

Exercice 10

1) montrer que si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

2) applications : a) (1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2f(x)-a^2f(a)}{x-a}$ (2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{af(x)-xf(a)}{x-a}$

b) on suppose que $f(a)>0$ montrer que la fonction $F(x)=\sqrt{f(x)}$ est dérivable en a et déterminer le nombre dérivé

Les limites

Exercice 1

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x^2+1-\cos x}{x+\sin x}$

a) calculer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

b) montrer que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{3}{4}$

c) montrer que

$$\forall x>1\ :\ \frac{x^2}{x-1}\le f(x)\le\frac{x^2+2}{x-1}$$

en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

d) montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ puis déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Exercice 2

Soit la fonction $f(x)=\sqrt{x^2-2x\cos x+1}$

a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ |x-\cos x|\le f(x)$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$

c) déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos x}{x}$

d) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \ f(x)\le x+1$

en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Exercice 3

Soient $a>0$ et $b\neq0$

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x}{a}E\left(\dfrac{b}{x}\right)$

a) Montrer que

$$(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\ /\ \frac{b}{a}-\frac{x}{a}<f(x)\le\frac{b}{a}$$

b) encadre $f(x)$ pour $x<0$

c) en déduire que $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ \ \left|f(x)-\dfrac{b}{a}\right|\le\dfrac{|x|}{a}$

puis calculer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

Exercice 4

1) Déterminer suivant a la limite

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{ax}{\left(x^2-1\right)^2}$$

2) Etudier suivant a la limite

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-ax$$

Exercice 5

Soit $m\in\mathbb{R}$ on considère la fonction

$$f_m(x)=\frac{x^3+mx+1}{x^2+x}$$

a) déterminer D le domaine de f_m

b) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$

c) discuter suivant m la limite $\lim\limits_{x\to-1} f_m(x)$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x} & ;\ x<1\\[2mm] f(x)=\dfrac{-2x+k}{\sqrt{x^2+2}+1} & ;\ x\ge1\end{cases}$$

a) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) calculer la limite $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

c) calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ puis déduire b

pour que f admette une limite en $a=1$

Exercice 7

a) Calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(ax+1)^2-1}{x}$

b) montrer par récurrence que

$$\lim_{x\to0}\frac{(ax+1)^n-1}{x}=na\ ,\ a\in\mathbb{R}^*$$

c) en déduire $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(11x+1)^{157}+(3x-1)^{97}}{x}$

Les limites

Exercice 8

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x + E(x)}{x}$

a) montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

b) calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

c) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ \ |f(x) - 1| \leq \dfrac{2}{x}$

en déduire la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Exercice 9

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) \ , \ \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\sin x}}{x^2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{15-2x}} \ , \ \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{\cos x}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{4-x}}{x-1} \ , \ \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - x - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} - 2}{\sqrt{x-1} - 2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x - \sqrt{x} + 1} - \sqrt{x-1} \ ; \ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} xE\left(\frac{4}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{(1-x^2)\sqrt{x^2+2} + 2}{x^2 - 2} \ ; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{E\left(\sqrt{x}\right)}{x+1}$$

Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} E(x) = 1 \ , \ \lim_{x \to -\infty} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

Exercice 10

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + (m+1)x - 3}{x^2 + x} & ; \ x < -1 \\ f(x) = \dfrac{-2x + b}{\sqrt{x^2+2} + 1} & ; \ x \geq -1 \end{cases}$$

a) calculer les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) discuter suivant m la limite $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

c) calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ puis déduire b et m

pour que f admette une limite en $a = -1$

Exercice 11

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xE\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \ x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x - E(x)}{\sqrt{x}} & ; \ x > 0 \end{cases}$$

1) montrer que $(\forall x < 0)\ \ 1 \leq xE\left(\dfrac{1}{x}\right) < 1 - x$

en déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

2) f admet-elle un limite en $a = 0$?

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x| - E(x)}}{x^2}$$

1) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ \ \ 0 \leq f(x) < \dfrac{1}{x^2}$

en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) montrer que

$(\forall x \in \mathbb{R}^{-*})\ \ \ 0 \leq f(x) < \dfrac{\sqrt{1-2x}}{x^2}$

en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Exercice 13

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2}$$

1) vérifier que

$$\frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} + \cos x \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

Et calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2}$

2) en déduire que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 7$