Les nombres complexes

1 L'ensemble des nombres complexes

L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$. On imagine qu'il existe un nombre imaginaire noté i, solution de cette équation.
On va construire un ensemble noté $\mathbb{C}$ plus grand que $\mathbb{R}$ qu'est engendré par le couple $(1, i)$ (càd. tout élèment de $\mathbb{C}$ est combinaison linéaire de 1 et i à coefficients dans $\mathbb{R}$).

Définition :

L'ensemble $\mathbb{C}$ est définie par : $\mathbb{C} = \{z = a + ib/(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ et \ i^2 = -1\}$.
⋆ $a + ib$ s'appelle l'écriture algébrique (unique pour tout élèment de $\mathbb{C}$) de z.
⋆ a s'appelle la partie réelle de z sera notée $\mathfrak{Re}(z)$.
⋆ b s'appelle la partie imaginaire de z sera notée $\mathfrak{Im}(z)$.
⋆ L'ensemble des nombres imaginaires pures sera noté $i\mathbb{R}$.

Proposition :

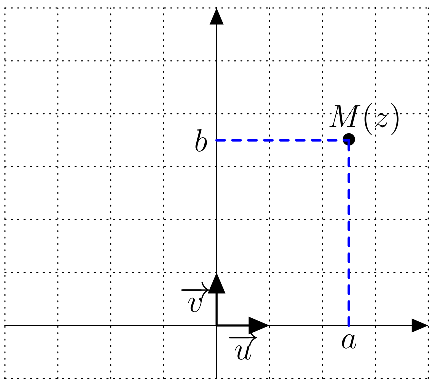
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$:

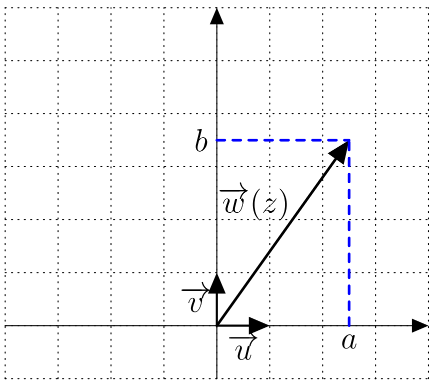
$$z = z' \iff \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(z') \ et \ \mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z')$$

$$z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}(z) = 0 \qquad\qquad z \in i\mathbb{R} \iff \mathfrak{Re}(z) = 0$$

La représentation graphique d'un nombre complexe :

Le plan (P)(appelé après le plan complexe) minue d'un repère orthonormé directe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
⋆ Tout point $M(a, b)$ du plan (P) est une image d'un unique nombre complexe $z = a + ib$, on écrit $M(z)$. De plus z s'appelle l'affixe de M et on écrit $z = aff(M)$.
⋆ Tout vecteur $\overrightarrow{w}(a, b)$ du plan (P) est une image d'un unique nombre complexe $z = a+ib$, on écrit $\overrightarrow{w}(z)$. De plus z s'appelle l'affixe de $\overrightarrow{w}$ et on écrit $z = aff(\overrightarrow{w})$.





Conséquences :

⋆ Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé l'axe réel.
⋆ Les nombres imaginaires pures sont les affixes des points de l'axe des ordonnés appelé l'axe imaginaire.

Proposition :

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $\overrightarrow{w}(z_{\overrightarrow{w}})$, $\overrightarrow{t}(z_{\overrightarrow{t}})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A \quad ; \quad aff(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{t}) = aff(\overrightarrow{w}) + aff(\overrightarrow{t}) \quad ; \quad aff(\alpha\overrightarrow{w}) = \alpha.aff(\overrightarrow{w})$$

Proposition :

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $I(z_I)$ telle que I est le milieu de $[AB]$. On a :
⋆ $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ ⋆ Si A, B et C sont distincts, alors : A, B et C sont rectilignes $\Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

2 Conjugué d'un nombre complexe - module d'un nombre complexe

Définition :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe tel que $a, b \in \mathbb{R}$. Le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Proposition :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\star$ $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et en général : $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$.

$\star$ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et en général : $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$.

$\star$ Si $z' \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

$\star$ $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$.

Conséquences :

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z) \quad ; \quad z - \overline{z} = 2i\mathfrak{Im}(z) \quad ; \quad \overline{\overline{z}} = z \quad ; \quad \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$$
$$; \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z \quad ; \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z \quad ;$$

Définition :

Le plan complexe minue d'un repère orthonormé directe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soit $M(z)$ un point du plan complexe tel que $z = a + ib$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
Le module du nombre complexe z est la distance OM sera noté $|z|$ et on a : $OM = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposition :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\star$ $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et en général : $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$.

$\star$ Si $z' \neq 0$, alors $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

$\star$ $|z^n| = |z|^n$.

$\star$ $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Conséquences :

$\star$ $z\overline{z} = |z|^2$

$\star$ $|\overline{z}| = |-z| = |z|$

$\star$ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$\star$ $z = z' \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} |z| = |z'|$.

$\star$ Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ du plan complexe, on a : $AB = |z_B - z_A|$.

3 L'argument et la forme trigonomètrique d'un nombre complexe

Définition :

Soit $M(z)$ dans le plan complexe, minue d'un repère orthonormé directe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, tel que $z \neq 0$.

On appelle argument de z qu'on note $arg(z)$ toute mesure de l'angle orientée $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}})$ en radian et on écrit $arg(z) \equiv \overline{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})}[2\pi]$.

Remarque :

0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Proposition :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\star$ $arg(zz') \equiv arg(z) + arg(z')[2\pi]$ et en général : $arg\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} arg(z_k)$.

$\star$ $arg\left(\frac{1}{z'}\right) \equiv -arg(z')[2\pi]$

$\star$ $arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg(z) - arg(z')[2\pi]$

$\star$ $arg\,(z^n) \equiv n\; arg(z)[2\pi]$

Proposition :

Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ des points du plan complexe $C \neq D$ on a :
$\star$ Si $A \neq B$ on a : $\overline{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})} \equiv arg(b-a)[2\pi]$.
$\star$ Si $A \neq B$ et $A \neq C$ on a : $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$.
$\star$ Si $A \neq B$ et $C \neq D$ on a : $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \equiv arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$.

Remarques :

$\star$ $(\forall z \in \mathbb{R}_+^*)$: $arg(z) \equiv 0[2\pi]$.
$\star$ $(\forall z \in \mathbb{R}_-^*)$: $arg(z) \equiv \pi[2\pi]$.
$\star$ $(\forall z \in i\mathbb{R}_+^*)$: $arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
$\star$ $(\forall z \in i\mathbb{R}_-^*)$: $arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Proposition :

Tout nombre complexe non nul $z = a+ib$ s'écrit sous la forme $z = r[\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)]$ où $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{a}{r}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{b}{r}$.

Définition :

L'écriture $z = r[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]$ s'appelle la forme trigonomètrique du nombre complexe z et on note $z = [r, \alpha]$.
(ie. tout nombre complexe non nul est bien déterminé par son module et son argument)

Proposition :

Soient $z = [r, \alpha]$ et $z = [r', \alpha']$ de $\mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$-z = [r, \alpha+\pi] \quad ; \quad \overline{z} = [r, -\alpha] \quad ; \quad zz' = [rr', \alpha+\alpha'] \quad ; \quad \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\alpha\right]$$
$$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \alpha-\alpha'\right] \quad ; \quad z^n = [r^n, n\times\alpha]$$

La formule de Moivre

Pour tout couple $(n, \alpha) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$ on a : $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$.

Remarque :

La formule de Moivre sert à calculer $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

4 La notation exponentielle d'un nombre complexe non nul.

Définition :

$\star$ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on note par $e^{i\alpha}$ le nombre complexe $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ et on écrit $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha) = e^{i\alpha}$.
$\star$ Pour tout nombre complexe non nul z, on appelle la notation exponentielle la notation $re^{i\alpha}$ où $z = [r, \alpha]$ et on écrit $z = re^{i\alpha}$.

Proposition :

Pour tous $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$\star$ $\overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$ $\quad$ $\star$ $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$ $\quad$ $\star$ $e^{i\alpha}e^{i\alpha'} = e^{i(\alpha+\alpha')}$ $\quad$ $\star$ $\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}} = e^{i(\alpha-\alpha')}$

Proposition :

Les formules d'Euler : $\boxed{\cos(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}}$ et $\boxed{\sin(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}}$

Remarque :

On utilise les formules d'Euler dans la linéarisation de $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$ ou $\cos^n(x)\sin^m(x)$. Càd les transformées en somme des termes de types $a\cos(kx)+b\sin(kx)$ en développant $\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ ou $\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n$.

Exemples :

$$\cos^3(x)=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x) \qquad \sin^4(x)=\frac{1}{8}\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$$

5 Les racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul.

Définition :

Soient u un nombre complexe non nul et $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$.
On dit que le nombre complexe z est une racine n-ième (ou racine d'ordre n) du nombre complexe u si $z^n=u$.

Proposition :

Tout nombre complexe non nul $z=re^{i\alpha}$ tel que $r>0$, admet n racines n-ièmes qui sont :

$$z_k=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \quad , \qquad k\in\{0,1,\dots,n-1\}$$

Proposition :

La somme des racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle. $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}=0\right)$

Conséquences :

$\star$ Les racines n-ièmes de l'unité sont : $u_k=e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$
$\star$ Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.
$\star$ Les racines cubiques de l'unité sont : 1, $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}$.
$\star$ Les racines 4-ièmes de l'unité sont 1, -1, i et $-i$.

Proposition :

$$1+j+j^2=0 \quad ; \quad \overline{j}=j^2 \quad ; \quad j^3=(\overline{j})^3=1 \quad ; \quad j\overline{j}=1$$

Proposition :

Toute équation $az^2+bz+c=0$ tels que $a\in\mathbb{C}^*$ et $b,c\in\mathbb{C}$ admet :
$\star$ une solution double $z=-\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta=b^2-4ac=0$.
$\star$ deux solutions différentes $z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ si $\Delta\neq 0$ avec δ est une racine carrée de Δ.

Conséquences :

Si z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ $(a\neq 0)$ alors :
$\star$ $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$ pour tout z de $\mathbb{C}$.
$\star$ $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ et $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.

6 Les transformations dans le plan et les nombres complexes .

$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par une transformation dans le plan.

Nature de la transformation	Définition	Description complexe
une translation du vecteur $\overrightarrow{u}(b)$	$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$	$z' = z + b$
une homothétie de centre $\Omega(w)$ et de rapport k	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z - w) + w$
une rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle θ $(M \neq \Omega)$	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$	$\begin{cases} \lvert z' - w\rvert = \lvert z - w\rvert \\ arg\left(\dfrac{z' - w}{z - w}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$ $\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - w) + w$

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2022
– الموضوع –

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SS | NS 22F

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية - خيار فرنسية	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ **L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;**
- ✓ **Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;**
- ✓ **L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.**

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	**Géométrie de l'espace**	**3 points**
Exercice 2	**Nombres complexes**	**3 points**
Exercice 3	**Calcul des probabilités**	**3 points**
Exercice 4	**Equations différentielles et calcul intégral**	**2.5 points**
Problème	**Etude de fonctions numériques et suites numériques**	**8.5 points**

- ✓ **On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et $|z|$ son module**
- ✓ **ln désigne la fonction logarithme népérien**

Exercice 1 (3points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$

0,5 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$

0,25 b) En déduire que $x+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,5 2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,1,2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$

Déterminer une équation de la sphère (S)

0,5 3) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

4) On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

0,25 a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0,5 b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées

0,5 c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot(\vec{i}+\vec{k})$, puis en déduire la distance $d(A,(\Delta))$

Exercice 2 (3points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a=-1-i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b=-1+i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

0,5 1) Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d=-2$

2) On considère la rotation R de centre D et d'angle $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

0,5 Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c=-4$

0,5 3) a) Ecrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique

0,5 b) En déduire que $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2=\frac{c-d}{b-d}$

4) Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2 , (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ')

0,25 a) Vérifier que $|z+2|=2$

0,5 b) Prouver que $z+\overline{z}=-8$ (remarquer que $|z|=4$)

0,25 c) En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera

Exercice 3 (*3points*) :

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard simultanément trois boules de l'urne.

0,75 1) Montrer que $p(A)=\dfrac{1}{6}$; où A est l'évènement " N'obtenir aucune boule rouge "

0,75 2) Calculer $p(B)$; où B est l'évènement " Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes "

0,75 3) Montrer que $p(C)=\dfrac{1}{2}$; où C est l'évènement " Obtenir exactement une boule rouge "

0,75 4) Calculer $p(D)$; où D est l'évènement " Obtenir au moins deux boules rouges "

Exercice 4 (*2.5points*) :

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x}$

0,75 1) a) Vérifier que $x \mapsto xe^{x}$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$; puis calculer $I=\int_{-1}^{0} h(x)\,dx$

0,75 b) A l'aide d'une intégration par parties calculer $J=\int_{-1}^{0}(x+1)^{2} e^{x}\,dx$

0,5 2) a) Résoudre l'équation différentielle $(E): y''-2y'+y=0$

0,5 b) Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0)=1$ et $h'(0)=2$

Problème (*8.5points*) :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1)^{2}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

0,5 1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0,5 2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

0,5 3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

0,75 b) Etudier le signe de $(f(x)-x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ)

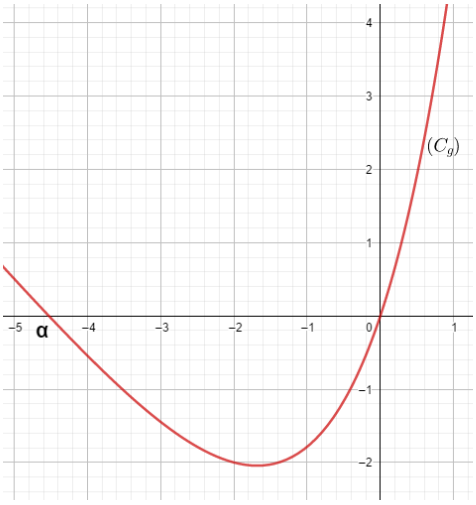
0,5 4) a) Montrer que $f'(x)=(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1)^{2}+x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 b) Vérifier que $x(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1)\geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$

0,25 c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

0,5 5) a) Montrer que $f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$; où

$g(x)=(2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4$ pour tout x de $\mathbb{R}$



0,5 b) A partir de la courbe ci-contre de la fonction g ,

déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha)=0$)

0,5 c) Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les

abscisses des deux points d'inflexions.

1 6) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

(On prend : $\ln(4)\approx 1,4$, $\alpha \approx -4,5$ et $f(\alpha)\approx -3,5$)

0,5 7) a) Montrer que la fonction f admet une fonction

réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

0,25 b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln 4)$

8) Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 a) Montrer par récurrence que $0<u_n<\ln 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,25 c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

0,5 d) Calculer la limite de la suite (u_n) .

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2022
– الموضوع –

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SS | RS 22F

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية - خيار فرنسية	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	2,5 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique et calcul intégral	8,5 points

✓ ln désigne la fonction logarithme népérien

8

Exercice 1 (2,5 points) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout n de $I\!N$

0,5 1) a) Montrer que pour tout n de $I\!N$, $u_n > 1$

0,75 b) Montrer que pour tout n de $I\!N$, $u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(u_n - 1)$ et déduire que la suite (u_n) est décroissante et convergente

2) On pose pour tout n de $I\!N$, $v_n = u_n - 1$

0,5 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

0,5 b) Ecrire u_n en fonction de n puis déduire la limite de la suite (u_n).

0,25 c) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{2021}$

Exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux points $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(3,0,-1)$ et de rayon $R=3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$

0,25 1) a) Calculer la distance ΩA

0,5 b) Montrer que les droites (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.

0,25 c) Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S)

0,5 2) Soit le point $M_a(2a-3,\ 3-2a,\ a-1)$ où $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ et déduire que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

0,5 3) a) Vérifier que $2x-2y+z-9a+13=0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ)

0,5 b) Montrer que $d(\Omega,(P_a)) = |3a-6|$

0,5 c) Déterminer les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S).

Exercice 3 (3 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $Z_A = 1+5i$, $Z_B = 1-5i$ et $Z_C = 5-3i$

0,25 1) Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$

0,5 2) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de B par h

0,5 3) On considère la rotation R de centre C et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$, déterminer l'image de B par R

4) Soit F le point d'affixe $Z_F = -1+i$

0,25 a) Vérifier que $\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$

0,5 b) En déduire que $\left(\overline{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF}}\right) \equiv \pi[2\pi]$

0,5 c) Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et déduire la nature du triangle AEF

0,5 d) Déduire que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.

Exercice 4 (3 points) :

Une urne contient trois boules blanches, quatre boules rouges et cinq boules vertes, indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1) On considère les événements suivants: A : " Obtenir exactement deux boules rouges "
B : " Obtenir exactement une boule verte "

0,75 a) Montrer que $p(A) = \frac{12}{55}$ et $p(B) = \frac{21}{44}$

0,75 b) Calculer $p(A/B)$: la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2) Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées

1 a) Déterminer la loi de probabilité de X

0,5 b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes.

Problème (8,5 points) :

Soit f la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2 \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

0,75 1) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$

0,5 2) a) Montrer que f est continue à droite en 0

0,5 b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement

0,75 3) a) Montrer que $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$

0,5 b) Dresser le tableau de variations de f

0,5	**4) a) Sachant que** $f''(x)=2x^2(6\ln x-5)\ln x$ **pour tout** x **de l'intervalle** $]0,+\infty[$ **, étudier le signe de** $f''(x)$ **sur** $]0,+\infty[$
0,5	**b) Déduire que la courbe** (C) **admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses**
1	**5) a) Construire la courbe** (C) **dans le repère** $(O,\vec{i},\vec{j})$ **(on prend :** $\sqrt{e}\simeq 1{,}6$ **et** $e^2\simeq 7{,}2$**)**
0,5	**b) En utilisant la courbe** (C)**, déterminer le nombre de solutions de l'équation** $x^2(\ln x-1)=-1$
	6) On considère la fonction g **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $g(x)=f(\lvert x\rvert)$
0,5	**a) Montrer que la fonction** g **est paire**
0,5	**b) Construire** (C_g) **la courbe représentative de** g **dans le même repère** $(O,\vec{i},\vec{j})$
0,5	**7) a) On pose** $I=\int_1^e x^4(\ln x-1)\,dx$ **, en utilisant une intégration par parties, montrer que** $I=\dfrac{6-e^5}{25}$
0,5	**b) On considère la fonction** h **définie sur l'intervalle** $]0,+\infty[$ **par** $h(x)=x^5(\ln x-1)^2$**. Vérifier que** $h'(x)=5f(x)+2x^4(\ln x-1)$
0,5	**c) Déduire que** $\int_1^e f(x)\,dx=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}I$
0,5	**d) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe** (C) **et l'axe des abscisses et les droites d'équations** $x=1$ **et** $x=e$