Épreuve de Maths Filières : SMA - SMB Coefficient : 9 Durée : 4 heures	Royaume du Maroc Ministère de l'Éducation Nationale De la Formation professionnelle de l'Enseignement supérieur & de la Recherche scientifique	Examen National du BACCALAURÉAT Session Principale Juin 2014

Exercice Numéro 1 : (03,00 points)

Soit : $a_n = \underbrace{333\cdots3}_{n\ fois\ le\ 3}1$; $n \in \mathbb{N}^*$

0,50 **1** Vérifier que a_1 ; a_2 sont deux nombres premiers.

0,50 **2** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $3\,a_n + 7 = 10^{n+1}$.

0,75 **3** Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $10^{30k+2} \equiv 7\,[31]$.

0,75 **4** Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $3\,a_{30k+1} \equiv 0\,[31]$.

Puis en déduire que 31 divise a_{30k+1} .

0,50 **5** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $n \equiv 1\,[30] \implies a_n x + 31y = 1$ *est insolvable* .

Exercice Numéro 2 : (03,50 points)

Rappel : $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soient $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

0,50 **1** Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

0,75 **2** Calculer $J^2 = J \times J$ puis en déduire la stabilité de E dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

Soit : $A * B = A \times N \times B$; $\forall\, A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3 **a** Soit la morphisme définie ainsi : $\varphi : (\mathbb{C}^*,\times) \longmapsto (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),*)$

$x + iy \longmapsto M(x,y)$

0,50 **b** Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$; $E^* = E\backslash\{\theta\}$.

0,50 **c** Montrer que $(E^*,*)$ est un groupe commutatif.

0,50 **4** Montrer que : $\forall\,(A,B,C) \in E^3$; $A * (B + C) = A * B + A * C$.

0,75 **5** En déduire que $(E,+,*)$ est un corps commutatif.

Exercice Numéro 3 : (03,50 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit : (E) : $z^2 - \sqrt{2}\,e^{i\theta}\,z + e^{2i\theta} = 0$; $z \in \mathbb{C}$; $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \backslash \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

0,25 **1** **a** Vérifier que le discriminant de (E) est donné par : $\Delta = \left(\sqrt{2}\,i\,e^{i\theta}\right)^2$

0,75 **b** Donner z_1 ; z_2 les solutions de (E) sous la forme trigonométrique

2 Soient : $I(1)$; $J(-1)$; $T_1\left(e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$; $T_2\left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\right)$; $A(\sqrt{2}\,e^{i\theta})$.

0,50 **a** Montrer que : $(OA) \perp (T_1T_2)$.

0,25 **b** Montrer que A ; K ; O sont alignés. Avec $K = milieu[T_1T_2]$.

0,25 **c** En déduire que : $(OA) = médiatrice[T_1T_2]$.

0,25 **3** **a** Donner l'écriture complexe de la rotation $r = rotation\left(T_1, \frac{\pi}{2}\right)$.

0,50 **b** Montrer que : $b = \sqrt{2}\,e^{i\theta} + i$; $b = aff(B)$; $B = r(I)$

0,25 **c** Montrer que : $(IJ) \perp (AB)$.

0,25 **4** Déterminer $aff(C)$; $C = t(A)$; $t = translation(-\vec{v})$.

0,25 **5** Montrer que : $A = milieu[BC]$.

■ Exercice Numéro 4 : (08,00 points)

I Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2} & ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

0,50 **1** **a** Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$ et à droite en zéro.

0,25 **b** Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

0,25 **2** **a** Montrer que : $(\forall x > 0)$; $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$

0,25 **b** Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,50 **c** Montrer que : $\exists\, \alpha \in\,]0,1[$; $f'(\alpha) = 0$.

0,50 **d** En déduire que : $f'\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = 0$

II Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1cm$.

0,50 **1** **a** Vérifier que : $\forall\, t \in [1,+\infty[$; $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{t^2}{1+t^2} \leq 1$

1,00 **b** Montrer que : $\forall\, x \geq 1$; $F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$

On pourra remarquer que : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt - \int_1^x \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\left(\frac{\ln t}{t}\right) dt$

1,00 **c** Calculer puis interpréter les limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{F(x)}{x}\right)$; $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$

0,50 | 2 a | Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ puis donner $F'(x)$; $\forall x \geq 0$

0,25 | b | Étudier la monotonie de F sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

0,50 | III 1 a | Montrer que : $\forall t > 0$; $-t\ln t \leq \frac{1}{e}$

0,25 | b | Montrer que : $\forall t \geq 0$; $f(t) \leq \frac{1}{e}$

0,25 | c | En déduire que : $\forall x > 0$; $F(x) < x$.

2 | Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi : $\begin{cases} u_{n+1} = F(u_n) & ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 \,\epsilon\,]0,1[\end{cases}$

0,50 | a | Montrer que : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$; $u_n \,\epsilon\,]0,1[$.

0,50 | b | Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle converge.

0,50 | c | Calculer ainsi la limite suivante : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

■ Exercice Numéro 5 : (02,00 points)

1 | Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{-\left(\frac{1}{x}\right)} & ; \quad \forall x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

0,25 | a | Montrer que la fonction g est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,25 | b | Montrer que la fonction g est continue à droite en zéro .

0,25 | c | Montrer que la fonction g est n'est pas continue en zéro .

2 | On pose : $L(x) = \int_0^x g(t)\,dt$; $x \,\epsilon\,]0,+\infty[$

0,25 | a | Calculer $L(x)$; $\forall x \,\epsilon\,]0,+\infty[$.

0,25 | b | Montrer que la fonction L est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,25 | c | Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x)$

3 | On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie pour chaque n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = n\left(\left(\frac{1}{1}\right)^2 e^{-n} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-\left(\frac{n}{2}\right)} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 e^{-\left(\frac{n}{3}\right)} + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}\right)^2 e^{-\left(\frac{n}{n-1}\right)}\right)$$

0,25 | a | Montrer que : $\forall n \geq 1$; $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$

0,25 | b | En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge puis donner sa limite .