Exercice 1

Soit (U_n) une suite définie par $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+3U_n} ; n \in \mathbb{N} \\ U_0 = 1 \end{cases}$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\frac{1}{3} \leq U_n$

2. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

3. On pose $V_n = 1 - \frac{1}{3U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

c) Calculer V_n en fonction de n

d) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n = \frac{1}{3 - (\frac{1}{2})^{n-1}}$ puis calculer $\lim U_n$

4. On pose $S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \cdots + \frac{1}{U_n}$ et $w_n = \ln(3\,U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que $S_n = 3n - 1 + (\frac{1}{2})^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite