EXERCICE 1 :

Partie 1 : On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de D_g
2. Vérifier que : $x^6 - x^4 - 4 = (x^2-2)(x^4+x^2+2)$
3. Etudier le signe de la fonction g sur D_g

Partie 2 : On considère la fonction numérique f définie sur $[-1,1]$ par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - 1$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$
2. Donner le tableau de variations de f sur $[-1,1]$
3. Calculer $f(1)$, puis étudier le signe de la fonction f sur $[-1,1]$

Partie 3 :

On considère la fonction numérique h définie par : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1 & si \ \ x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\\ h(x) = \sqrt{x^2+3} & si \ \ x \in [-1,1] \end{cases}$

1. Montrer que h est continue en 1 et -1
2. Montrer que la courbe (C_h) admet un centre de symétrie $I(0,1)$ sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$
3. Vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$; puis montrer que la droite (D): $y = -x+3$ est une asymptote oblique de la courbe (C_h) au voisinage de $+\infty$
4. En déduire par symétrie que la droite (Δ): $y = -x-1$ est une asymptote oblique de la courbe (C_h) au voisinage de $-\infty$
5. Etudier la dérivabilité de h en 1 ; puis interpréter graphiquement le résultat.
6. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$
7. En déduire le signe de $h'(x)$ sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$
8. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$
9. En déduire le signe de $h'(x)$ sur $[-1,1]$
10. Dresser le tableau de variation de h sur R
11. Donner les équations des demi-tangentes à gauche de 1 et à droite de -1
12. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [\sqrt{2};+\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$ et que $2 < \alpha < 3$
13. Construire (C_h) , (D) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie 4 : Soit $k(x)$ la restriction de h sur l'intervalle $I =]1;+\infty[$

1. Montrer que k admet une fonction réciproque k^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
2. Calculer $(k^{-1})'_{(0)}$ en fonction de α
3. Tracer $(C_{k^{-1}})$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

EXERCICE 2 :

I. Considérons la suite (V_n) définie par : $V_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$ pour tout n de IN
   1. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et la premier terme .
   2. Calculer la limite de la suite (V_n)

II. Considérons la suite (U_n) définie par : $U_{n+1} = \sqrt{5U_n+6}$
   1. Montrer que $1 \leq U_n \leq 6$ pour tout n de IN
   2. Montrer que (U_n) est croissante
   3. Montrer que pour tout n de IN : $6 - U_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6-U_n)$
   4. En déduire que pour tout n de IN : $0 \leq 6 - U_n \leq V_n$, puis calculer la limite de la suite (U_n)

III. Soit (U_n) une suite géométrique, telle que $U_2 = 3$ et $U_5 = -24$
   1. Déterminer la raison de la suite (U_n) pour tout n de IN
   2. On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k = U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_n$ pour tout n de IN
      a. Montrer que pour tout n de IN : $S_n = \frac{1}{4} + \frac{(-2)^n}{2}$
      b. Calculer la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{3^n}$

PROF : YOUSSEF AIT EL MADANE