Exercice (1)

Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

☺ *résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation* $f(x)=\dfrac{1}{3}$.

f est-elle injective ?

☺ *montrer que* $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)\geq 0$. *f est-elle surjective ?*

☺ *soit g la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $[0,1[$ puis définir sa réciproque g^{-1}*

Exercice (2)

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}+2}$

1) on pose $A=\left\{1,\dfrac{1}{2}\right\}$ déterminer $f^{-1}(A)$. f est-elle surjective ?

2) prouver que $f(\mathbb{R}^+)=\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right[$

3) soit g l'application définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ par : $g(x)=f(x)$

a) montrer que g est injective

b) déduire que g réalise un bijection $\mathbb{R}^+$ vers $\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ et définir g^{-1}

exercice (3)

on considère l'application f telle que : $f(x)=\dfrac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$

1) vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$ que peut-on déduire ?

2) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)\leq\dfrac{1}{4}$. f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Exercice (4)

Soit l'application $\begin{aligned} f:\ &\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}\\ &(x,y)\to 2x+y\end{aligned}$

1) montrer que f est surjective non injective

2) on pose $A=\{-1,2\}$ déterminer $f(A\times A)$

3) déterminer $f^{-1}(\{0\})$

Exercice (5)

Soit f une application de E vers F ، A et B deux parties de F

1) prouver que $A\subseteq B\ \Rightarrow\ f^{-1}(A)\subseteq f^{-1}(B)$

2) Montrer que $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$

3) montrer que $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

Exercice (6)

On pose $I=]0,+\infty[$. on considère l'application f définie de $I\times I$ vers $I\times I$ par : $f((x,y))=\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$

1) prouver que f est injective

2) montrer que f est bijective puis définir sa réciproque

Exercice (7)

E un ensemble non vide A une partie de E et soit f l'application définie de $P(E)$ vers $P(A)$ par : $f(X)=X\cap A$

☺ déterminer $\Gamma=\{X\in P(E)/\ f(X)=X\}$ et prouver que f est surjective

☺ déterminer $f(\overline{A})$ puis montrer que f n'est par injective