Exercice 1 $\quad g(0)=1$ et $g(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x}$ si $x>0$

I)

1 - Mq $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad e^{x}\geq x+1$

2 - Determiner le tableau de variation de g

3 - On pose $h(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}-e^{-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}^+$

a - Mq $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $0\leq h''(x)\leq x$

b - En deduire que $0\leq h(x)\leq\dfrac{x^3}{6}$

c - " " la derivabilité de g en 0 à droite

II) on considère la fonction : $f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$ si $x>0$ et $f(0)=1$

1 - Mq f est continue en 0 à droite.

2 - a) Verifier que $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f(x)=2g(2x)-g(x)$.

b) Etudier la derivabilité de f en 0 à droite.

3 - a) Mq $\forall x>0$, $\quad f'(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x^2}\left(2x+1-(x+1)e^{x}\right)$

b) Determiner le Tableau de variation de f

4 - Construire $\mathcal{C}_f$.

$2\sim 2$

JUIN 2004

(I) soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

1) calculer les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}^*$

2) étudier le sens de variation de f

3) a) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

b) tracer la courbe (C_f)

(II) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n^2 f(U_n) = U_n e^{-U_n}$

1) prouver que $(\forall x > 0)$: $e^x \geq x + 1$

2) en déduire que $(\forall x > 0)$ $x^2 f(x) \leq \dfrac{x}{x+1}$

3) a) montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < U_n < \dfrac{1}{n+1}$

b) montrer que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

4) on pose $V_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} U_k$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.

a) prouver que $V_n = \ln\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$

b) déterminer la limite de la suite $(V_n)_n$

ت 803 :

ليكن n عدد طبيعي غير معدوم و $a_1, a_2, \ldots, a_n$ من $\mathbb{R}_+^*$

نسمي A الوسط الحسابي لـ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ معرف بـ : $A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$

نسمي G الوسط الهندسي لـ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ معرف بـ : $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$

1- برهن أن من أجل كل $x > 0$: $e^{x-1} \geq x$

2- إستنتج أن من أجل كل $i \in [1, n]$: $e^{\frac{a_i}{A} - 1} \geq \frac{a_i}{A}$

3- إستنتج أن : $1 \geq \left(\frac{G}{A}\right)^n$ ثم إستنتج أن $G \leq A$