DEBOURI MHAMED

RESUME DES SUITES NUMERIQUES

1 La suite majorée, minorée et bornée

Définition :

⋆ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant M$.
⋆ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \geqslant m$.
⋆ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée s'il existe un réel positif C tel que $(\forall n \geqslant n_0) : |U_n| \leqslant C$.
(ie. la suite est majorée et minorée à la fois)

Remarques :

⋆ Toute suite positive est minorée par 0.
⋆ Toute suite négative est majorée par 0.

2 La suite monotone

Définition :

On dit qu'une suite est monotone s'elle est croissante ou décroissante.

Proposition :

⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} \geqslant U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n \geqslant 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} > U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n > 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} \leqslant U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} < U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n < 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est constante $\Leftrightarrow (\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = U_n$.

Remarques :

⋆ Une suite croissante est minorée par son premier terme.(ie. $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \geqslant U_{n_0}$)
⋆ Une suite décroissante est majorée par son premier terme.(ie. $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant U_{n_0}$)

3 La suite arithmétique - la suite géométrique

	une suite arithmétique	une suite géométrique
définition	$(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = U_n + r$	$(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = qU_n$
terme général	$(\forall n \geqslant n_0) : U_n = U_p + (n-p)r$	$(\forall n \geqslant n_0) : U_n = U_p \times q^{n-p}$
la somme $S_n = U_p + ... + U_n$	$S_n = \left(\dfrac{n-p+1}{2}\right)(U_p + U_n)$	$S_n = \left(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right) \times U_p\ ; (q \neq 1)$

Exemple :

⋆ $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

⋆ $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$

4 Limite d'une suite

Définition :

$\star$ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente s'elle admet une limite finie l qd $n \longrightarrow +\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

$\star$ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est divergente s'elle n'est pas convergente.

Proposition :

Soit $r \in \mathbb{Q}^*$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^r = \begin{cases} +\infty & si\ r > 0 \\ 0 & si\ r < 0 \end{cases}$$

Critères de convergence :

$\star$ Toute suite croissante et majorée est convergente.

$\star$ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

$\star$ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : |U_n - l| \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0 \end{cases} \Longrightarrow (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ convergente\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

$\star$ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : W_n \leqslant U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l \end{cases} \Longrightarrow (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ convergente\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

$\star$ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty\ et\ (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ divergente$

$\star$ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : W_n \leqslant U_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty\ et\ (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ divergente$

Ordre et convergence :

$\star$ $\begin{cases} (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant k) :\ U_n \geqslant 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \end{cases} \Longrightarrow l \geqslant 0$

$\star$ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l' \end{cases} \Longrightarrow l \leqslant l'$

Suites de type $f(U_n) = U_{n+1}$:

$$\begin{cases} f\ est\ continue\ sur\ un\ intervale\ fermé\ I \\ f(I) \subset I \\ U_{n_0} \in I \\ (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ convergente \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \end{cases} \Longrightarrow l\ est\ une\ solution\ de\ l'équation\ f(x) = x\ sur\ I$$

Les suites adjascentes :

Définition :

On dit $(U_n)_{n\geqslant p}$ et $(V_n)_{n\geqslant q}$ sont deux suites adjacentes si :

$\star$ $(U_n)_{n\geqslant p}$ est croissante et $(V_n)_{n\geqslant q}$ est décroissante. $\star$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$

Proposition :

$(U_n)_{n\geqslant p}$ et $(V_n)_{n\geqslant q}$ sont deux suites adjacentes $\Longrightarrow$ elles sont convergentes et ont la même limite.

EXERCICE 1

Soit $(U_n)_n$ la suite réelle définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{3 - U_n} \end{cases}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < U_n < 2$

2) vérifier que $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{3 - U_n}$ en déduire la monotonie de $(U_n)_n$

3) on pose $V_n = \dfrac{2 - U_n}{1 - U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique et calculer V_n puis U_n en fonction de n

4) pour tout entier naturel n on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n} U_p$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - 1 \leq \dfrac{2}{3}(U_n - 1)$

b) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n - 1 \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 + \dfrac{1}{n} \leq S_n \leq 1 + \dfrac{5}{2n} - \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

EXERCICE 2

On considère la suite $(U_n)_n$ telle que : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3} \end{cases}$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad -1 < U_n \leq 0$

2. étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

3. on pose $V_n = \dfrac{1}{1 + U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

   montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique et déterminer V_n puis U_n en fonction de n

4. pour tout entier non nul n on pose $S_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{k=n} V_k$ montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \left|S_n - \dfrac{1}{4}\right| \leq \dfrac{3}{n}$

EXERCICE 3

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{k}{3^k}$ pour tout entier non nul n

1) calculer U_1 ; U_2

2) a) montrer par récurrence que $(\forall p \geq 2) \quad p \leq \left(\dfrac{3}{2}\right)^p$

b) en déduire que $(U_n)_n$ est majorée par 1

BARYCENTRE

Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Barycentre de deux points pondérés.

1-1) Soit A un point et α un réel non nul ; le couple (A, α) s'appelle un point pondéré.
Plusieurs points pondérés constituent un système pondéré

1-2) Barycentre de deux points pondérés.

a) Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré tel que $\alpha + \beta \neq 0$; le barycentre du système pondéré Σ est le point G qui vérifie : $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

On écrit : $G = Bar\ \{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$

1-3) Propriétés de barycentre

a) Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

b) Si $\alpha = \beta$ le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ s'appelle l'isobarycentre de A et B qui n'est que le milieu du segment $[AB]$.

c)Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que : $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.Pour tout point M du plan (P) on a : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$

ou $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre et on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

d)Si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors les points A, B et G sont alignés.

e)Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ des points du plan et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$

et donc on a les coordonnées de G : $\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{a+b} \end{cases}$

2) Barycentre de trois points pondérés

2-1) Soit Σ :$\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$
Il existe un et un seul point G qui vérifie $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ Et s'appelle le barycentre du système pondéré Σ

2-2) Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$
si M est un point quelconque dans le plan (P)

on a : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$

donc : $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$

2-3) Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ des points du plan et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$

et donc les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$$

2-4) Propriétés :

a)Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul : pour $k \neq 0$
$Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma) = Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$

b) La propriété d'associativité :
Si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)$ avec $\alpha + \beta \neq 0$
et $G' = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$
Alors : $G = Bar\ \{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$
Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

c)Cas particulier : Si les poids α ; β et γ sont égaux le barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha)\}$
S'appelle **le centre de gravité** du triangle ABC.

d) Barycentre de quatre points pondérés

Soit Σ =$\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ .Il existe un et un seul point G qui vérifie : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Et si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$
Et M est un point quelconque dans le plan (P)

Alors on a : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{s}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{s}\overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{s}\overrightarrow{MC} + \frac{\delta}{s}\overrightarrow{MD}$

où $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

e) Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ et $D(x_D;y_D)$ des points du plan
Et si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$
Alors : les coordonnées de G sont :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{s} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{s} \end{cases}$$

où $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

f) Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre

g) Si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$
Avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $\gamma + \delta \neq 0$ Si $G' = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$
Et $G'' = Bar\ \{(C, \gamma); (D, \delta)\}$
Alors $G = Bar\ \{(G', (\alpha + \beta)); (G'', \gamma + \delta)\}$