12pts

EXERCICE 01

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}-1$.

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\|=2cm$.

0.5pts 1)Montrer que : $D_f=\mathbb{R}$.

1pts 2)a-Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

0.5pts b-En déduire les branches infinies de la courbe (C_f).

1pts 3)a-Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

1pts b-Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.(Justifier votre réponse)

0.5pts 4)Donner l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

0.75pts 5)a-Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-x=(x+1)\left[\dfrac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}\right]$.

0.75pts b-En déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ).

1.5pts 6)Tracer la courbe (C_f) (On prend $\sqrt{2}\approx1.4$).

7)Soit g la restriction de f sur $]-\infty;1]$

0.5pts a-Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

1pts b-Tracer la courbe $\left(C_{g^{-1}}\right)$ dans le même repère.

8)On considère la suite numérique (u_n) définie par: $u_0=-\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1pts a-Montrer par récurrence que: $(\forall n\in\mathbb{N});-1\prec u_n\prec 0$.

1pts b-Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat 5-b) puis qu'elle est convergente.

1pts c-Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

3pts

EXERCICE 02

1)Déterminer une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans les deux cas suivants :

1.5pts a- $f(x)=x^3-3x^2+4$ et $I=\mathbb{R}$. b- $f(x)=2x\left(x^2+1\right)^3$ et $I=\mathbb{R}$.

2)Soit g une fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{2}{x^2}+\sqrt[3]{x}$.

1pts a-Montrer que g admet des fonctions primitives G sur $]0;+\infty[$ puis le déterminer.

0.5pts b-Déterminer la fonction primitive G de g sur $]0;+\infty[$ telle que $G(1)=0$