○ Problème N°01 : (9,25pts)

I- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}$.

0,75 **1)-** Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Puis montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction.

0,5 **2)- a)-** f est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter graphiquement le résultat.

0,75 **b)-** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$; $f'(x) = \dfrac{1 - 2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Dresser le tableau de variations complet de f en justifiant le réponse.

0,75 **3)-** Etudier la concavité de (C_f) et préciser l'abscisse de son point d'inflexion .

0,75 **4)-** Résoudre dans $\mathbb{R}^+$, l'équation : $f(x) = x$, puis étudier le signe de $f(x) - x$.

5)- Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = \left[\dfrac{1}{8}; +\infty\right[$.

0,5 **a)-** Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = \left]-\infty; \dfrac{1}{4}\right]$.

0,5 **b)-** Montrer que g^{-1} est dérivable en 0 et préciser $\left(g^{-1}\right)'(0)$.

1,5 **6)-** Construire (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II- Soit n un entier naturel telle que : $n \geq 5$.

On considère dans $\mathbb{R}^+$, l'équation suivante $(E) : f(x) = \dfrac{1}{n}$.

0,75 **1)-** Montrer que (E) admet exactement deux solutions α_n et β_n dans $\mathbb{R}^+$ tels que : $0 < \alpha_n < \dfrac{1}{8}$ et $\dfrac{1}{8} < \beta_n < 1$.

0,5 **2)- a)-** Etudier la monotonie de $(\alpha_n)_{n \geq 5}$, puis en déduire qu'elle est convergente.

0,5 **b)-** Déterminer en justifiant la réponse : $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n.\sqrt[3]{\alpha_n}$.

0,5 **3)-** Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n.(1 - \beta_n) = 3$.

4)- Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $S_n = \dfrac{1}{n} . \sum\limits_{k=1}^{n} f'(k)$.

0,5 **a)-** En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*) ; f'(k) \leq f(k+1) - f(k) \leq f'(k+1).$$

0,5 **b)-** En déduire que : $(\forall n \geq 2)$; $\dfrac{f(n)}{n} - \dfrac{1}{3n} \leq V_n \leq \dfrac{f(n+1)}{n}$. Puis déterminer la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.