[redacted] Devoir (2) | Niveau : 1 BAC. SM

[redacted]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2x+6}{x^2+4x+7}$

1,5pt ① montrer que f est majorée par 1 et minorée par $-\dfrac{1}{3}$ sur $\mathbb{R}$

1 pt ② calculer $f(-1)$ et $f(-5)$ puis déduire les extremums de f sur $\mathbb{R}$

[redacted]

Soit f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{1}{8}x^3$ et $g(x) = \dfrac{x+4}{2x+2}$

1pt ① Dresser le tableau de variation de f et de g

0,75pt ② vérifier que $f(2)=g(2)$ et $f(-2)=g(-2)$ puis déterminer l'intersection de (C_g) avec l'axe (Ox)

0,5pt ③ déterminer les deux asymptotes de la courbe (C_g)

2pt ④ représenter les deux courbes (C_f) et (C_g) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1,5pt ⑤ déduire graphiquement les solutions de $\dfrac{1}{8}x^3 - \dfrac{x+4}{2x+2} \leq 0$

0,5pt ⑥ i) vérifier que $A(2, g(2)) \in (\Delta)$ et $B(-2, g(-2)) \in (\Delta)$ avec $(\Delta)\ y = \dfrac{1}{2}x$

1,5pt ii) représenter (Δ) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et déduire graphiquement le signe de $g(x) - \dfrac{1}{2}x$

⑦ soit h la fonction fonction définie par : $h(x) = 2x - x^2$

1,5pt i) dresser le tableau de variation de h et étudier le signe de $g(x) - 1$

1,5pt ii) déduire la monotonie de $h \circ g$ sur $]-1, 2]$ et sur $[2, +\infty[$

0,75pt iii) vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $h \circ g(x) = \dfrac{3x^2+12x}{4(x+1)^2}$

0,75pt iiii) déduire que : $\forall x \in]-1, +\infty[$: $\dfrac{3x^2+12x}{4(x+1)^2} \leq 1$

[redacted]

Soit ABC un triangle

pt ① représenter I le barycentre de $(A, -27)$ et $(B, -9)$ puis J le barycentre de $(A, 3)$ et $(C, -7)$

② Soit G le barycentre de $(A, 3)$, $(B, 1)$ et $(C, -7)$

et déduire que $G \in (CI)$

pt i) vérifier que I est le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 1)$ et déduire la représentation du point G

pt ii) montrer que G, B et J sont alignés

pt iii) soit K le barycentre de $(B, -2)$ et $(C, 14)$. montrer que $K \in (AG)$. puis déduire la représentation du point K

③ déterminer et représenter les deux ensembles :

$(D) = \{ M \in (P) \,/\, \|3\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| \}$

$(E) = \{ M \in (P) \,|\, \|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{BA} - 7\overrightarrow{BC}\| \}$

On a : $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ~ D'après la supposition ~

Donc : $\frac{1}{2} u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Et puisque : $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$ d'après le résultat de la question $\boxed{2}$ ~ a

Alors : $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b ~ Déterminons $\lim u_n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$ et $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Et puisque $\lim 0 = 0$ et $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Alors, d'après les critères de convergence

$\lim u_n = 0$

EXERCICE 19

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \text{ ; } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\boxed{1}$ ~ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < 2$

$\boxed{2}$ ~ a ~ Montrer que (u_n) est une suite croissante, puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 \leqslant u_n < 2$

b ~ En déduire que (u_n) est une suite convergente.

$\boxed{3}$ ~ a ~ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$

b ~ En déduire par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c ~ Déterminer $\lim$

CORRECTION

$\boxed{1}$ ~ Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < 2$

<u>Initialisation</u>

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$

Donc $0 < u_0 < 2$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$