○ *Problème N°01* : (9,25pts)

I- *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :* $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}$.

0,75 **1)-** *Calculer :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. *Puis montrer que* (C_f) *admet au voisinage de* $+\infty$ *une branche parabolique dont on déterminera la direction.*

0,5 **2)- a)-** f *est-elle dérivable à droite en* 0 *? Interpréter graphiquement le résultat.*

0,75 **b)-** *Montrer que :* $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})$; $f'(x)=\dfrac{1-2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$. *Dresser le tableau de variations complet de* f *en justifiant le réponse.*

0,75 **3)-** *Etudier la concavité de* (C_f) *et préciser l'abscisse de son point d'inflexion .*

0,75 **4)-** *Résoudre dans* $\mathbb{R}^+$ *, l'équation :* $f(x)=x$, *puis étudier le signe de* $f(x)-x$.

5)- *Soit* g *la restriction de* f *à l'intervalle* $I=\left[\dfrac{1}{8};+\infty\right[$.

0,5 **a)-** *Montrer que* g *admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur* $J=\left]-\infty;\dfrac{1}{4}\right]$.

0,5 **b)-** *Montrer que* g^{-1} *est dérivable en* 0 *et préciser* $\left(g^{-1}\right)'(0)$.

1,5 **6)-** *Construire* (C_f) *et* $(C_{g^{-1}})$ *dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

II- *Soit* n *un entier naturel telle que :* $n\geq 5$.

On considère dans $\mathbb{R}^+$ *, l'équation suivante* (E) : $f(x)=\dfrac{1}{n}$.

0,75 **1)-** *Montrer que* (E) *admet exactement deux solutions* α_n *et* β_n *dans* $\mathbb{R}^+$ *tels que :* $0<\alpha_n<\dfrac{1}{8}$ *et* $\dfrac{1}{8}<\beta_n<1$.

0,5 **2)- a)-** *Etudier la monotonie de* $(\alpha_n)_{n\geq5}$, *puis en déduire qu'elle est convergente.*

0,5 **b)-** *Déterminer en justifiant la réponse :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} n.\sqrt[3]{\alpha_n}$.

0,5 **3)-** *Montrer que :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} n.(1-\beta_n)=3$.

4)- *Soit* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie par :* $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $S_n=\dfrac{1}{n}.\sum\limits_{k=1}^{n} f'(k)$.

0,5 **a)-** *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :*

$$(\forall k\in\mathbb{N}^*);\ f'(k)\leq f(k+1)-f(k)\leq f'(k+1).$$

0,5 **b)-** *En déduire que :* $(\forall n\geq 2)$; $\dfrac{f(n)}{n}-\dfrac{1}{3n}\leq V_n\leq\dfrac{f(n+1)}{n}$. *Puis déterminer la limite de* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.