PROF MHAMED DEBOURI

Devoir Surveillé 2

Partie I :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x(\sqrt{x} - 2)^2$$

1) a) Déterminer D_f
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
2) a) Étudier la dérivabilité de f en 0^+, puis interpréter le résultat géométriquement.
   b) Écrire l'équation de (T) la demi-tangente à (C_f) au point d'abscisse 0, à droite.
3) a) Étudier la dérivabilité de f sur D_f, et montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f'(x) = 2(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)$$

.

   b) Calculer $f'(4)$ et $f'(1)$ puis interpréter géométriquement chacun des résultats.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
4) a) Montrer que (C_f) coupe l'axe (OX) en deux points A et B. à déterminer.
   b) Étudier la position relatives de (C_f) et l'axe des abscisses.
5) a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) - x = x(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)$$

   b) Déduire que (C_f) coupe la droite $(D) : y = x$ en trois points A ; E et F.
   c) Étudier la position relative de (C_f) et la droite (D).
6) a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f''(x) = \frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}}$$

   b) Déduire la concavité de (C_f) et montrer que (C_f) admet un point d'inflexion I et donner ses coordonnées.
7 Tracer dans le même repère : la demi-tangente (T), la droite (D) et la courbe (C_f).

Partie II :

On définie la suite (u_n) par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_0 = \frac{1}{2}$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$
2) Montrer que (u_n) est croissante et qu'elle est convergente.
3) Calculer la limite de la suite (u_n)

PROF DEBOURI M'HAMED	Devoir libre 2 Semestre 1	

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x-2\sqrt{x}+2$

(C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f)
3) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $(\Delta): y=x$
4) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0
   b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f
   d) Construire (Δ) et (C_f)
5) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.
   a) Montrer par récurrence que, $u_n>1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.
   b) Montrer que (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle convergente.
   c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) a) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 4$, $u_n\geq 0$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel $n\geq 5$, $u_n\geq n-3$.
   c) En déduire la limite de la suite (u_n).
3) On définit la suite (v_n) par : $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b) En déduire que : $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.
   c) Soit la somme S_n définie par : $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.
   Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.