

○ Problème N°01 : (9,25pts)

I- Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}$ .

0,75

1)- Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Puis montrer que  $(C_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique dont on déterminera la direction.

0,5

2)- a)-  $f$  est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter graphiquement le résultat.

0,75

b)- Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^{**}); f'(x) = \frac{1 - 2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ . Dresser le tableau de variations complet de  $f$  en justifiant la réponse.

0,75

3)- Etudier la concavité de  $(C_f)$  et préciser l'abscisse de son point d'inflexion.

0,75

4)- Résoudre dans  $\mathbb{R}^+$ , l'équation :  $f(x) = x$ , puis étudier le signe de  $f(x) - x$ .

5)- Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = \left[ \frac{1}{8}; +\infty \right[$ .

0,5

a)- Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur  $J = \left] -\infty; \frac{1}{4} \right]$ .

0,5

b)- Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable en 0 et préciser  $(g^{-1})'(0)$ .

1,5

6)- Construire  $(C_f)$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

II- Soit  $n$  un entier naturel telle que :  $n \geq 5$ .

On considère dans  $\mathbb{R}^+$ , l'équation suivante (E) :  $f(x) = \frac{1}{n}$ .

0,75

1)- Montrer que (E) admet exactement deux solutions  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  dans  $\mathbb{R}^+$  tels que :

$$0 < \alpha_n < \frac{1}{8} \text{ et } \frac{1}{8} < \beta_n < 1.$$

0,5

2)- a)- Etudier la monotonie de  $(\alpha_n)_{n \geq 5}$ , puis en déduire qu'elle est convergente.

0,5

b)- Déterminer en justifiant la réponse :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \sqrt[3]{\alpha_n}$ .

0,5

3)- Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot (1 - \beta_n) = 3$ .

4)- Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f'(k)$ .

0,5

a)- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :  $(\forall k \in \mathbb{N}^*); f'(k) \leq f(k+1) - f(k) \leq f'(k+1)$ .

0,5

b)- En déduire que :  $(\forall n \geq 2); \frac{f(n)}{n} - \frac{1}{3n} \leq V_n \leq \frac{f(n+1)}{n}$ . Puis déterminer la limite de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

○ **Problème : (11pts)**

⇒ On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x^2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right); \text{ si } x \neq 0.$$

0,5

1) a) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

0,5

b) Justifier que  $f$  est impaire.

1

2)  $f$  est-elle dérivable en 0 ? Interpréter le résultat graphiquement.

3) a) Soit  $x \in \mathbb{R}^{**}$ .

✓ En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction  $g$  définie par :

$$g(t) = \arctan(\sqrt{t}) - \sqrt{t}, \text{ Montrer que :}$$

1

$$\left( \exists c \in \left] 0; \frac{1}{x^2} \right[ \right); f(x) - x = \frac{-\sqrt{c}}{2(1+c)}.$$

0,75

b) En déduire que  $(C_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une asymptote oblique  $(\Delta)$  d'équation :  $y = x$ .

0,5

c) Justifier que  $(C_f)$  est au dessous de  $(\Delta)$  sur  $]0; +\infty[$ .

0,5

4) a) Montrer que :  $(\forall t \in ]0; +\infty[); \arctan(t) - \frac{t}{1+t^2} > 0$ .

1

b) Calculer  $f'(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^{**}$ . Puis en déduire que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

1,5

5) Construire  $(C_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

0,5

6) a) Justifier que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1

b) Construire le graphe  $(C_{f^{-1}})$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

7) Soit  $F$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  tels que :

$$F(0) = 0 \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = f(x).$$



0,75

a) Montrer que  $F$  est paire.

1

b) Prouver que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ .

Indication : On pourra utiliser le résultat suivant :

- Si une fonction  $V$  est croissante et majorée sur un intervalle de la forme  $]a; +\infty[$

alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = L$ , où  $L \in \mathbb{R}$ .

0,75

c) Dresser le tableau des variations de  $F$  sur  $\mathbb{R}$  en justifiant la réponse.

**Fin Du Sujet**