Exercice 3

1) montrer que $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \ln(1+x) \leq x \leq (x+1)\ln(1+x)$

2) a) montrer que : $\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \leq e^{n} \leq \prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$

b) en déduire $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

Exercice 3

1) montrer que $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \ln(1+x) \leq x \leq (x+1)\ln(1+x)$

2) a) montrer que : $\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \leq e^{n} \leq \prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$

b) en déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

Exercice 3

1) montrer que $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \ln(1+x) \leq x \leq (x+1)\ln(1+x)$

2) a) montrer que : $\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \leq e^{n} \leq \prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$

b) en déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

Exercice 3

1) montrer que $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \ln(1+x) \leq x \leq (x+1)\ln(1+x)$

2) a) montrer que : $\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \leq e^{n} \leq \prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$

b) en déduire $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

Exercice 3

1) montrer que $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \ln(1+x) \leq x \leq (x+1)\ln(1+x)$

2) a) montrer que : $\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \leq e^{n} \leq \prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$

b) en déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

Exercice n° 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{n^n}{n!}$$

1) **a)** Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \frac{1}{t+1} < \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t}$.

b) En déduire que : $\left(\forall t > 1\right) \quad \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t} < \ln(t) - \ln(t-1)$.

2) **a)** Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad u_n < 1$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln(2)$.

3) **a)** Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad t - \frac{t^2}{2} < \ln(t+1) < t$.

b) En déduire que : $\left(\forall n \geq 2\right) \quad n - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(n-1) < \ln(v_n) < n - 1$.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(v_n)}{n}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad w_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, w_n en fonction de v_n.

b) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = e$.

Exercice n° 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{n^n}{n!}$$

1) a) Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \frac{1}{t+1} < \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t}.$

b) En déduire que : $\left(\forall t > 1\right) \quad \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t} < \ln(t) - \ln(t-1).$

2) a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad u_n < 1.$

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln(2).$

3) a) Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad t - \frac{t^2}{2} < \ln(t+1) < t.$

b) En déduire que : $\left(\forall n \geq 2\right) \quad n - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(n-1) < \ln(v_n) < n - 1.$

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(v_n)}{n}.$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad w_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, w_n en fonction de v_n.

b) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = e.$

Exercice n° 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{n^n}{n!}$$

1) **a)** Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \frac{1}{t+1} < \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t}.$

b) En déduire que : $\left(\forall t > 1\right) \quad \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t} < \ln(t) - \ln(t-1).$

2) **a)** Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad u_n < 1.$

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln(2).$

3) **a)** Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad t - \frac{t^2}{2} < \ln(t+1) < t.$

b) En déduire que : $\left(\forall n \geq 2\right) \quad n - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(n-1) < \ln(v_n) < n - 1.$

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(v_n)}{n}.$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad w_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, w_n en fonction de v_n.

b) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = e.$

Exercice n° 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{n^n}{n!}$$

1) **a)** Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \frac{1}{t+1} < \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t}$.

b) En déduire que : $\left(\forall t > 1\right) \quad \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t} < \ln(t) - \ln(t-1)$.

2) **a)** Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad u_n < 1$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln(2)$.

3) **a)** Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad t - \frac{t^2}{2} < \ln(t+1) < t$.

b) En déduire que : $\left(\forall n \geq 2\right) \quad n - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(n-1) < \ln(v_n) < n - 1$.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(v_n)}{n}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad w_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, w_n en fonction de v_n.

b) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = e$.

Exercice n° 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{n^n}{n!}$$

1) **a)** Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \frac{1}{t+1} < \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t}.$

b) En déduire que : $\left(\forall t > 1\right) \quad \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t} < \ln(t) - \ln(t-1).$

2) **a)** Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad u_n < 1.$

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln(2).$

3) **a)** Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad t - \frac{t^2}{2} < \ln(t+1) < t.$

b) En déduire que : $\left(\forall n \geq 2\right) \quad n - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(n-1) < \ln(v_n) < n - 1.$

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(v_n)}{n}.$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad w_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, w_n en fonction de v_n.

b) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = e.$

Exercice 6

1) montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right) \quad \ln x \leq x-1$

2) soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ و $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots\ldots ; \alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}^{*+}$

Tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ on pose $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$

a) Montrer que pour tout k de $\{1;2;\ldots\ldots;n\}$ on a : $\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x_k\right)$

c) Montrer que : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln(x_k) \leq \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}{n}\right)$

d) Prouver que $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} x_k$

e) Montrer que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

En déduire que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pour tous $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ de $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice 6

1) montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right) \quad \ln x \leq x-1$

2) soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ و $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots\ldots ; \alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}^{*+}$

Tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ on pose $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$

a) Montrer que pour tout k de $\{1;2;\ldots\ldots;n\}$ on a : $\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x_k\right)$

c) Montrer que : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln(x_k) \leq \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}{n}\right)$

d) Prouver que $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} x_k$

e) Montrer que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

En déduire que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pour tous $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ de $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice 6

1) montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right) \quad \ln x \leq x-1$

2) soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ و $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots\ldots ; \alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}^{*+}$

Tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ on pose $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$

a) Montrer que pour tout k de $\{1;2;\ldots..;n\}$ on a : $\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x_k\right)$

c) Montrer que : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln(x_k) \leq \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}{n}\right)$

d) Prouver que $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots . x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} x_k$

e) Montrer que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

En déduire que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pour tous $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ de $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice 6

1) montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right) \quad \ln x \leq x-1$

2) soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ و $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots\ldots ; \alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}^{*+}$

Tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ on pose $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$

a) Montrer que pour tout k de $\{1;2;\ldots\ldots;n\}$ on a : $\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x_k\right)$

c) Montrer que : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln(x_k) \leq \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}{n}\right)$

d) Prouver que $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} x_k$

e) Montrer que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

En déduire que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pour tous $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ de $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice 6

1) montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right) \quad \ln x \leq x-1$

2) soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ و $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots\ldots ; \alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}^{*+}$

Tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ on pose $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$

a) Montrer que pour tout k de $\{1;2;\ldots..;n\}$ on a : $\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x_k\right)$

c) Montrer que : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln(x_k) \leq \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}{n}\right)$

d) Prouver que $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots . x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} x_k$

e) Montrer que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

En déduire que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pour tous $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ de $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice n° 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n^n}{n!}$$

1) **a)** Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \frac{1}{t+1} < \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t}$.

b) En déduire que : $\left(\forall t > 1\right) \quad \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t} < \ln(t) - \ln(t-1)$.

2) **a)** Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad u_n < 1$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$.

3) **a)** Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad t - \frac{t^2}{2} < \ln(t+1) < t$.

b) En déduire que : $\left(\forall n \geq 2\right) \quad n - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(n-1) < \ln(v_n) < n - 1$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(v_n)}{n}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $w_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, w_n en fonction de v_n.

b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = e$.

Exercice n° 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{n^n}{n!}$$

1) **a)** Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \frac{1}{t+1} < \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t}$.

b) En déduire que : $\left(\forall t > 1\right) \quad \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t} < \ln(t) - \ln(t-1)$.

2) **a)** Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad u_n < 1$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln(2)$.

3) **a)** Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad t - \frac{t^2}{2} < \ln(t+1) < t$.

b) En déduire que : $\left(\forall n \geq 2\right) \quad n - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(n-1) < \ln(v_n) < n - 1$.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(v_n)}{n}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad w_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, w_n en fonction de v_n.

b) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = e$.

Exercice n° 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{n^n}{n!}$$

1) **a)** Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \frac{1}{t+1} < \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t}$.

b) En déduire que : $\left(\forall t > 1\right) \quad \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t} < \ln(t) - \ln(t-1)$.

2) **a)** Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad u_n < 1$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln(2)$.

3) **a)** Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad t - \frac{t^2}{2} < \ln(t+1) < t$.

b) En déduire que : $\left(\forall n \geq 2\right) \quad n - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(n-1) < \ln(v_n) < n - 1$.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(v_n)}{n}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad w_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, w_n en fonction de v_n.

b) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \mathrm{e}$.

Exercice n° 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{n^n}{n!}$$

1) a) Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad \frac{1}{t+1} < \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t}$.

b) En déduire que : $\left(\forall t > 1\right) \quad \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t} < \ln(t) - \ln(t-1)$.

2) a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad u_n < 1$.

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln(2)$.

3) a) Montrer que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad t - \frac{t^2}{2} < \ln(t+1) < t$.

b) En déduire que : $\left(\forall n \geq 2\right) \quad n - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(n-1) < \ln(v_n) < n - 1$.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(v_n)}{n}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad w_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, w_n en fonction de v_n.

b) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = e$.