Mathématiques	Devoir surveillé N° 1	2 Bac SP

Exercice 1 (Questions indépendantes): 7 points

1)- Comparer $\sqrt{2}$ et $\sqrt[4]{5}$. **1pt**

2)- Résoudre dans $\mathbb{R}$ ce qui suit : $(x+1)^6-7=0$; $\sqrt[3]{3x-4}\leq 2$. **1pt + 1,5pt**

3)- Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^2-\cos(x)$.

a)- Justifier pourquoi g est continue sur $\mathbb{R}$. **0,75pt**

b)- En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]0,\frac{\pi}{2}[$. **0,75pt**

4)- Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{ax}{5x-2\sin x} ; x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$, où a est un nombre réel.

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en zéro. **2pts**

Problème : 13 ponits

Partie A :

Soit P la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x)=x^3-3x+2$.

1)- Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $P'(x)=3(x^2-1)$. **0,75pt**

2)- Dresser le tableau de variations de P (*Les limites ne sont pas demandées*). **0,75pt**

3)- En déduire que : $\forall x\in[0,+\infty[$, $P(x)\geq 0$. **0,5pt**

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=x^2-6x+8\sqrt{x}-5$.

1)- a)- Vérifier que : $\forall x\in[0,+\infty[$, $f(x)=(x-3)^2+8\sqrt{x}-14$. **0,75pt**

b)- En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. **0,5pt**

2)- Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$. **1pt**

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter le résultat graphiquement. **1,5pt**

4)- a)- Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2P(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. **1,5pt**

b)- En utilisant la question **A.3)**, déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. **1pt**

5)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. **1,5pt**

6)- Dresser le tableau de variations de f^{-1}. **1pt**

7)- a)- Calculer $f(4)$. **0,25pt**

b)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 3, puis calculer : $(f^{-1})'(3)$. **2pts**

Exercice 1 :

1ère partie :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}+x}{x}$.

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_f.

② - Etudier les branches infinie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

③ - Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet un centre de symétrie $\Omega(0,1)$.

④ - Etudier la dérivabilité de f en 2 à droite et interpréter le résultat géométriquement.

⑤ - Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f$.

2ème partie :

Soit g la fonction numérique d'une variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(x)=f(x) & ; \ x\in\left]-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right[\\ g(x)=\sqrt{4-x^2}+1 & ; \ x\in\left]-2;2\right[\end{cases}.$$

① - a - Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g .

b - Montrer que la restriction de g à l'intervalle $\left]-2;2\right[$ est une fonction paire.

② - Montrer que la fonction g est continue en 2 .

③ - Etudier la dérivabilité de g en 2 à gauche et interpréter le résultat géométriquement.

④ - Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\left]-2;2\right[$.

⑤ - Dresser le tableau de variation de g .

⑥ - Tracer $(\mathscr{C}_g)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3ème partie :

Soit h restriction de g à l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$.

① - Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .

② - Montrer que la fonction h^{-1} est dérivable sur J.

③ - Dresser le tableau de variation de h^{-1} .

④ - Tracer $(\mathscr{C}_{h^{-1}})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

⑤ - Calculer $(\forall x\in J)$: $h^{-1}(x)$.

1.

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=x+\frac{2}{\sqrt{x+1}}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm).

1. ..
   a. Déterminer D_f domaine de définition de la fonction f .
   b. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le deuxième résultat .
   c. Montrer que : la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera son équation .
   d. Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) .
2. ..
   a. Montrer que : $f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ pour tout x de D_f .
   b. Montrer que : pour tout x de $]-1,0]$ on a $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}\geq 1$ puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-1,0]$.
   c. Montrer que : pour tout x de $[1,+\infty[$ on a $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}\leq 1$ puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $[1,+\infty[$.
   d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f .
   e. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $x_0=0$.
3. Montrer que : l'équation $x\in]-1;+\infty[\ ;\ f(x)=x$ admet une solution unique α tel que : $0<\alpha<1$.
4. Construire la droite (Δ) et la tangente (T) et la courbe (C_f) de f dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
5. ..
   a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera .
   b. Montrer que : la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J .
   c. Calculer $(f^{-1})'(\alpha)$ en fonction de α .
   d. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} .

2.

PREMIERE PARTIE

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\frac{3(x+1)}{\sqrt{2x-1}}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans