11

Exercice 1

1] Simplifier le nombre A tel que : $A = \dfrac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[5]{27}}{\sqrt[3]{3}}$.

2] Comparer $\sqrt[5]{5}$ et $\sqrt[6]{6}$.

3] Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3+7} - 2x\right)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$.

4] Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ h(1) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Montrer que h est continue en 1.

5] Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) l'équation $(2x+3)^4 - 16 = 0$;

b) l'inéquation $\sqrt[3]{x-2} < 3$.

12

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\sqrt{x^2+1} - 1$.

1] Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2] Montrer que $f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ pour tout réel x, puis étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3] Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un ensemble E que l'on précisera.

4] Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution réelle unique α.

5] Vérifier que : $0 < \alpha < 1$.

6] Etudier la dérivabilité de la fonction f^{-1} sur E. Calculer $(f^{-1})'(0)$.

7] Etudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

8] On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{x^2+1}.$$

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = \dfrac{x f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

c) Donner le tableau de variations de la fonction g.

Exercice 1

13

1] On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3+x^2-12}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = m \end{cases}$$

a) Vérifier que : $x^3+x^2-12=(x-2)(x^2+3x+6)$

b) Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 2.

2] Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=12$.

(Noter que : $\sqrt{x}=\sqrt[6]{x^3}$ et $\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{x^2}$).

Exercice 2

14

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x)=x^3+x+2\sqrt{x}-5$$

1] Dresser le tableau de variations de g.

2] Montrer que l'équation $g(x)$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+$. et vérifier que $1<\alpha<2$.

3] Déterminer le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Exercice 3

15

Soit h la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $h(x)=x+1-\sqrt{2x-1}$.

1] Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

2] Montrer que h est continue sur $[1;+\infty[$.

3] a) Montrer que : $(\forall x\in[1;+\infty[)\quad h'(x)=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}\,(1+\sqrt{2x-1})}$.

b) En déduire la monotonie de h sur $[1;+\infty[$.

4] a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle E que l'on déterminera.

b) Vérifier que : $(\forall x\in[1;+\infty[)\quad h(x)=\dfrac{(\sqrt{2x-1}-1)^2+2}{2}$.

c) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout x de E.

5] Calculer $h^{-1}(\sqrt{3}+1-\sqrt{2\sqrt{3}-1})$

Exercice 1

16 1] Soit h la fonction définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Montrer que h est continue en 0.

2] Montrer que : $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{72} = 6\sqrt[12]{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1} = \sqrt[3]{2} - 1$.

3] Rendre rationnel le dénominateur de $A = \dfrac{1}{5^{\frac{1}{3}} - 1}$.

Exercice 2

17 Soit g la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1-\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}{x-1}$.

1] Vérifier que : $(\forall x \in]1;+\infty[)$ $g(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

2] Montrer que l'équation $\dfrac{1}{x-1} = \sqrt{x}$ admet une seule solution β dans l'intervalle $]1;2[$.

3] Montrer que $\beta^2(\beta-2) = 1-\beta$.

Exercice 3

18 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x^2+1}$.

1] Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2] Montrer que : $(\forall x \in D_f)$ $f'(x) = \dfrac{-6x}{(2x^2+1)^2}$.

Dresser le tableau de variations de f.

3] Soit u la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;0[$.

a) Montrer que u admet une fonction réciproque u^{-1} définie sur $]\frac{1}{2};2[$.

b) Montrer que : $(\forall x \in]\frac{1}{2};2[)$ $u^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{2-x}{2x-1}}$.

4] a) Montrer que l'équation $u(x) = \sqrt{2}$ admet une solution unique α telle que $-\frac{2}{3} < \alpha < -\frac{1}{2}$.

b) En déduire que : $\dfrac{1}{2} < \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \dfrac{2}{3}$.

Exercice 1

19

1] Soit h la fonction définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2-2} - \sqrt[3]{2}}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ h(2) = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{3} \end{cases}$$

Montrer que h est continue en 2.

2] a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t^2 - 5t + 6 = 0$.

b) En déduire les solutions de l'équation :

$$\sqrt[3]{x^2+2x+1} - 5\sqrt[3]{x+1} + 6 = 0.$$

Exercice 2

20 On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^3-1}$.

1] Vérifier que : $(\forall x \in]1;+\infty[)\quad f(x) = 2 + \dfrac{2}{x^3-1}$.

2] a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un un intervalle E que l'on précisera.

b) Donner le tableau de variations de f^{-1}

Comparer $f^{-1}(2\sqrt{3})$ et $f^{-1}(2\sqrt[3]{2})$.

c) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de E.

Exercice 3

21 On considère la fonction g définie par : $g(x) = x(\sqrt{x} - 3)^2$.

1] a) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0.

b) Interpréter géométriquement le résultat de la question précédente.

2] Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\quad g'(x) = (\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}-3)$

3] Donner le tableau de variations de g.

4] Soit h la restriction de g à l'intervalle $I = [9;+\infty[$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que h^{-1} est dérivable en 16 et calculer $(h^{-1})'(16)$.