LIMITES ET CONTINUITÉ

Exercice (1)

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E\left(\sqrt{x}\right)}{x+1}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x-\tan^2 x}}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x+1}{x^{p+1}-x^{p}+x-1}$; $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}+a-x}{\sqrt{a-x}+\sqrt{a^2-x^2}}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}\,E\left(\dfrac{3}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\sin(\cos x)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}+\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{2-x}-3}{x^2-1}$

Exercice (2)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^2\left(E\left(\dfrac{1}{x}\right)+E\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)$

1) montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right)\quad 3x-2x^2<f(x)\leq 3x$
2) déduire $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

exercice (3)

on considère la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x-E(x)}{x+E(x)}$

1) déterminer le domaine de définition de f
2) a) montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=1$

   b) f admet-elle un prolongement par continuité en $a=0$
3) montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

Exercice (4)

Soit k un élément de $\mathbb{N}^*-\{1\}$. on considère la fonction f définie par : $f(x)=xE\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

1) résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$ puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
2) a) montrer que $\left(\forall x\in\left]\dfrac{1}{4},1\right[\right)\quad f(x)=x$ et déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)$

   b) calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)$
3) montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=0$
4) a) montrer que $\left(\forall x\in\left]\dfrac{1}{k^2},\dfrac{1}{(k-1)^2}\right[\right)\quad f(x)=(k-1)x$

   b) étudier la limite de f au point $\dfrac{1}{k^2}$

LIMITES ET CONTINUITÉ

Exercice (1)

Montrer que : $\arctan\frac{3}{2}-\arctan\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}$; $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\arctan\left(\frac{120}{119}\right)$

$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{70}+\arctan\frac{1}{99}=\frac{\pi}{4}$; $\arctan 2016-\arctan\frac{2015}{2017}=\frac{\pi}{4}$

Exercice (2)

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\arctan\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$; $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{\arctan|x|-\frac{\pi}{4}}}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2+x+1}-\sqrt{x-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt[4]{x^4+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt[4]{x^4+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^2+60}}}{\sqrt{x^2-\sqrt[3]{x^4+60}}}$

Exercice (3)

Résoudre les équations suivantes

1) $\arctan x+\arctan x^2=-\frac{\pi}{4}$

2) $\sqrt[3]{x-\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}$

3) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+4\sqrt[3]{(x-1)^2}=4\sqrt[3]{1-x^2}$

4) $\frac{\sqrt[n]{x+3}}{x}+\frac{\sqrt[n]{x+3}}{3}=\frac{\sqrt[n]{x}}{5}$

Exercice (4)

Soit la fonction définie sur $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\sin x$

1) montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera

2) soit f^{-1} la réciproque de f montrer que $\left(\forall x\in\left]-1,1\right[\right)$ $f^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}-2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

Exercice (5)

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2\arctan\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

1) déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) étudier la dérivabilité de f à droite de 0

3) calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

4) soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=\left[1,+\infty\right[$

a) montrer que g est bijective de I vers J que l'on déterminera

b) montrer que $(\forall x\in I)\left(\exists!\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\right)$ $\sqrt{x}=\tan\alpha$ puis définir la fonction g^{-1}

5) montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution β unique dans

6) tracer dans le même repère les deux courbes (C_f) et $(C'_{g^{-1}})$