TD-ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercices d'application et de réflexions

Exercice1 :1)Ecrire en extension les ensembles suivants : $D_{180}=\{n\in\mathbb{N}/n/180\}$

$A=\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{-5}{2}\leq n^2\leq\frac{3}{2}\right\}$;

$B=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1=0\}$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des nombres pairs

Exercice2 :1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

$E_1=\{k\in\mathbb{Z}/|k+1|\leq 2\}$

$E_2=\{x\in\mathbb{Z}/k^2\leq 7\}$

$E_3=\{k\in\mathbb{Z}/7\leq k^2\leq 35\}$

$E_4=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/(x+y)(x-y)=32\}$

$E_5=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/x^2-y^2=15\}$

$E_6=\{(x;y)\in\mathbb{Z}^2/0\prec 2xy\leq 7\}$

$E_7=\left\{x\in\mathbb{Z}^*/(\forall n\in\mathbb{N})\frac{1}{x}\geq\frac{n}{n+1}\right\}$

$E_8=\{x\in\mathbb{Z}/(\forall n\in\mathbb{N})x^2\leq 4+n^3\}$

$E_9=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/0\prec 2x\leq y\leq 5\}$

$E_{10}=\left\{x\in\mathbb{Q}/x=\frac{p}{q}\, et\, p;q\in\mathbb{N}^* \text{ Vérifiant } p\leq 3q\leq 11\right\}$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des multiples de 5 dans $\mathbb{N}$

Exercice3 : Ecrire en extension les ensembles suivants : $A=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{n\pi}{6}\right):n\in\mathbb{Z}\right\}$

$B=\left\{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{6}\right):n\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice4 : $A=\{k\in\mathbb{Z}/|2k+1|\leq 3\}$ et $B=\{-2,-1,0,1\}$

Montrons que : $A=B$

Exercice5 : Soit $E=\{0;1;2\}$ } déterminer tous les ensembles inclus dans E. Qui s'appelle l'ensemble des parties de E et se note $\mathcal{P}(E)$.

Exercice6 : Ecrire en extension les ensembles suivants :1) $P(P(\varnothing))$ 2) $P(P(\{a;b\}))$

Exercice7 : donner Complémentaire des ensembles suivants : $[a;b[$ l'ensemble $\mathbb{Q}$

2) l'intervalle $[a;b[$ $a\prec b$

Exercice8 :Soient les ensembles :

$A=\left\{\frac{\pi}{4}+2\frac{k\pi}{5}:k\in\mathbb{Z}\right\}$ $B=\left\{\frac{\pi}{2}+2\frac{k\pi}{5}:k\in\mathbb{Z}\right\}$

Monter que : $A\cap B=\varnothing$

Exercice9 : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble E

Monter que : $\begin{cases}(\overline{B-C})\cup A=E\\(\overline{C-D})\cup A=E\end{cases}\Rightarrow(B-D)\subset A$

Exercice10 : Soient A ; B ; C des ensembles

Monter que : $A\subset B\subset C\Leftrightarrow A\cup B=B\cap C$

Exercice11 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

Monter que :

1) $A=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap\overline{C})$

2) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$

3) $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Leftrightarrow A\cap B=A\cap C$

Exercice12 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

Monter que : $\begin{cases}A\cup B\subset A\cup C\\A\cap B\subset A\cap C\end{cases}\Rightarrow B\subset C$

Exercice13 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

La différence symétrique de A et B c'est l'ensemble Qu'on note : $A\Delta B$ tel que : $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

1)Monter que : $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

2)Monter que : $\overline{A}\Delta\overline{B}=A\Delta B$

3)Monter que : $\forall C\in P(E)$: $A\Delta B=A\Delta C\Leftrightarrow B=C$

Exercice14 :Soit l'ensemble :

$E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+xy-2y^2+5=0\}$

1) a)vérifier que :

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)$

b) Ecrire en extension l'ensemble $E\cap\mathbb{Z}^2$

c) montrer que : $E=\left\{\left(\frac{2t^2-5}{3t};\frac{-t^2-5}{3t}\right)/ t\in\mathbb{R}^*\right\}$

4) Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

$A=\{0;1;4;9;16;...\}$ et $B=\left\{-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3};\frac{1}{4};...\right\}$

$C=\{...;-5;-2;1;4;7;...\}$

Exercice15 :soient E et F deux ensembles et A et B deux parties respectives de E et F

1)déterminer le complémentaire de $A\times F$ dans $E\times F$

2)déterminer le complémentaire de $E\times F$ dans $E\times F$

3)déterminer le complémentaire de $A\times B$ dans $E\times F$

Exercice17 : soient l'ensemble :

$L=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 1\}$

Monter qu'il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

Exercice18 : Soient les ensembles :

$H=\left\{y\in\mathbb{R} / y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} : x\in\mathbb{R}\right\}$

$G=\left\{y\in\mathbb{R} / y=\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} : x\in\mathbb{R}\right\}$

1- montrer que : $H=]0,1]$.

a- Considérer un élément $y_0\in H$

et montrer que $y_0\in]0,1]$

b- Considérer un élément $y_0\in]0,1]$

et montrer que $y_0\in H$

2- Monter que $G\subset H$

3- Est-ce que $G=H$?

Exercice19 : soit a un nombre réel on considère les deux ensembles suivants :

$E=\{x\in\mathbb{Z} / |x+1|\le 3\}$ et $F=\{x\in\mathbb{Z} / |2x-a|\le 4\}$

1) Ecrire E en extension

2) déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $E\cap F=\varnothing$

3) déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $\mathbb{N}\cap F=\varnothing$

4) déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $F\subset\mathbb{N}$

Exercice20 : on considère dans $\mathbb{Z}$ les deux parties suivantes :

$A=\left\{x\in\mathbb{Z} / \frac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{Z} / \frac{x+10}{x-5}\in\mathbb{Z}\right\}$

1)a) montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z}-\{5\})\frac{x+10}{x-5}=1+\frac{15}{x-5}$

1)b) montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z})\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}=2x-1+\frac{9}{2x-1}$

2) déterminer : A ; B; $A-B; B-A$ et $A\Delta B$ en extension

3)on admet que l'opération est associative dans l'ensembles des parties de $\mathbb{Z}$: $P(\mathbb{Z})$

Résoudre dans $P(\mathbb{Z})$ l'équation : $A\Delta X=B$

Exercice21 :Soient les ensembles :

$E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2-xy-2y^2=0\}$

$F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x+y=0\}$

1) montrer que : $F\subset E$

2)déterminer y de $\mathbb{R}$ tel que : $(1;y)\in E$; est ce que on a $E\subset F$?

3) montrer que : $E=F\cup G$ ou G est un ensemble à déterminer

4) Soient les ensembles :

$A=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x+1+\sqrt{x^2+1}=0\}$

$B=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x+1-\sqrt{x^2+1}=0\}$

a) montrer que : $H=A\cup B$

b) déterminer : $H\cap F$

Exercice22 :Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

1)a)déterminer une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A\cup X=B$

b)résoudre dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

2) on suppose que $C\subset A\subset B$

résoudre dans $P(E)$ le système : $\begin{cases}A\cup X=B\\A\cap X=C\end{cases}$