Exercice 1 : 3pts

Determiner la valeur de vérité de chacune des deux propositions suivantes :

1) $\exists x \in \mathbb{R} \,;\, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 - xy - 1 \neq 0$.

2) $\forall (n;m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* ; \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : 4pts

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \,;\, n \geq 4 : 2^n \geq n^2$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$; on pose $A_n = 77777 \ldots 7$. $(n \text{ septs})$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \; A_n = \frac{7}{9}(10^n - 1)$.

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \,;\, \exists k \in \mathbb{N} : 1 + 2 \times 3^{n-1} + 5^n = 8k$.

Exercice 3 : 5pts

1) Montrer que : $\forall (x;y;) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall r \in \mathbb{R}^+ : |x+y| + |x-y| \leq 2r \Leftrightarrow |x| \leq r$ et $|y| \leq r$.

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \,;\, \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} \in \mathbb{N}$.

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \sqrt{n^2+4} \notin \mathbb{N}$.

4) Sachant que $\sqrt{30} \notin \mathbb{Q}$; Montrer que : $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4 : 4pts

Soient A ; B et C des parties d un ensemble non vide E . Montrer :

1) $\complement_{E\times E}^{A\times B} = \left(\complement_E^A \times E\right) \cup \left(E \times \complement_E^B\right)$. 2) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

3) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$. 4) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = (A \cup B) \setminus B$.

Exercice 5 : 4pts

On pose : $E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$. $F = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 2y^2 - xy = 0\}$.

1) Montrer que : $F \neq \emptyset$ et $E \subset F$.

2) Détérminer un réel y sachant que : $(1;y) \in F$.

3) A-t-on $E = F$? . Justifier .

4) Détérminer un ensemble G vérifiant : $E \cup G = F$.

Exercice8 :Soient les ensembles :

$$A=\left\{\frac{\pi}{4}+2\frac{k\pi}{5} : k\in\mathbb{Z}\right\} \qquad B=\left\{\frac{\pi}{2}+2\frac{k\pi}{5} : k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Monter que : $A\cap B=\varnothing$

Exercice9 : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble E

Monter que : $\begin{cases}\left(\overline{B-C}\right)\cup A=E\\ \left(\overline{C-D}\right)\cup A=E\end{cases}\Rightarrow (B-D)\subset A$

Exercice10 : Soient A ; B ; C des ensembles